THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Alain Lucien MIGNOT

Première thèse

METHODES D'APPROXIMATION DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES LINEAIRES

Deuxième thèse

Propositions donnees par la Faculte :

TRAVAUX RECENTS SUR LE 13ème PROBLEME

DE HILBERT ET L'ε-ENTROPIE.

Soutenues le 14 MARS 1967 , *devant la Commission d'examen*

MM R. de POSSEL — *Président*

J.L. LIONS

M.P. SCHÜTZENBERGER — *Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546604_0080

THESES

présentées

A LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE PARIS

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES SCIENCES MATHEMATIQUES

par

Alain Lucien MIGNOT

Première thèse

METHODES D'APPROXIMATION DES SOLUTIONS DE CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES LINEAIRES

Deuxième thèse

Propositions donnees par la Faculte :

TRAVAUX RECENTS SUR LE 13ème PROBLEME DE HILBERT ET L'ε-ENTROPIE.

Soutenues le , devant la Commission d'examen

MM R. de POSSEL — *Président*

J.L. LIONS

M.P. SCHÜTZENBERGER — *Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

TABLE DES MATIERES

-:-:-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION

CHAPITRE I - APPROXIMATION DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES.

I.	Plan général d'étude.	1.1.
II.	Espaces utilisés et notations.	1.2.
III.	Formulation variationnelle du problème initial.	1.3.
IV.	Approximation de problèmes aux limites elliptiques pour des opérateurs d'ordre deux.	1.5.
	IV-1. Le problème initial variationnel (Q).	1.6.
	IV-2. Idées générales sur le problème approché (Q_ε).	1.7.
	IV-3. Construction de problèmes (Q_ε) approchant un problème de Dirichlet.	1.8.
	1. Premier problème approché.	1.9.
	2. Deuxième problème approché.	1.12.
	3. Troisième problème approché.	1.14.
	4. Problèmes formels équivalents à (Q_ε).	1.14.
	IV-4. Approximation d'un problème de Neumann.	1.15.
	IV-5. Approximation d'un problème mêlé.	1.19.
V.	Généralisation aux problèmes aux limites d'ordre $2m$.	1.22.
	V.1. Le problème initial formel.	1.23.
	V.2. Les problèmes approchés (Q_ε).	1.24.
	V.3. Problème approché correspondant au problème de Dirichlet *(I-62)*.	1.24.
	V.4. Problème approché correspondant au problème de Neumann *(I.63)*.	1.25.
VI.	Exemples correspondant à l'opérateur Δ^2.	1.25.
	VI.1. Problème de Dirichlet.	1.25.
	VI.2. Un problème de Neumann.	1.27.
VII.	Conclusion.	1.28.
VIII.	Remarque sur la régularisation des coefficients.	1.29.

CHAPITRE II - APPLICATIONS. CAS ELLIPTIQUE.

I.	Généralités.	2.1.
II.	Approximation d'un problème de Dirichlet dans un trapèze.	2.2.
	II.1. Le problème initial.	2.2.
	II.2. Le problème approché.	2.2.
	II.3. Résultats numériques.	2.3.
III.	Approximation d'un problème de Dirichlet dans un triangle avec coefficients régularisés et extrapolation.	2.4.
	III.1. Le problème initial.	2.4.
	III.2. Résultats numériques.	2.6.
	III.3. Le problème approché.	2.8.
	III.4. Résultats numériques	2.10.
IV.	Approximation d'un problème de Dirichlet dans un cercle avec coefficients régularisés.	2.12.
	IV.1. Le problème initial (P).	2.12.
	IV.2. Résultats numériques.	2.13.
	IV.3. Construction du problème approché (P_ε).	2.14.
	IV.4. Résultats numériques.	2.15.
V.	Approximation d'un problème mêlé.	2.15.
	V.1. Le problème initial.	2.15.
	V.2. Construction du problème approché (P_ε).	2.16.
	V.3. Résultats numériques.	2.17.
VI.	Approximation d'un problème de Dirichlet correspondant à l'opérateur Δ^2.	2.18.
	VI.1. Le problème initial	2.18.
	VI.2. Résultats numériques.	2.19.
	VI.3. Le problème approché.	2.20.
	VI.4. Résultats numériques.	2.21.
VII.	Description succinte du programme universel	2.21.
VIII.	Quelques conclusions.	2.24.

CHAPITRE III - EQUATIONS PARABOLIQUES LINEAIRES.

I. Introduction . 3.1.

II. Equations paraboliques linéaires dans un domaine cylindrique . 3.3.

II.1. Le problème initial . 3.3.

II.2. Principe de construction du problème approché . 3.7.

II.3. Approximation d'un problème mêlé du second ordre 3.9.

II.4. Approximation d'un problème de Dirichlet ou de Neumann du second ordre . 3.17.

II.5. Généralisation à un opérateur $A(t)$ d'ordre $2m$. 3.18.

II.6. Remarque sur la régularisation des coefficients . 3.18.

III. Equations paraboliques linéaires dans un domaine non cylindrique . 3.19.

III.1. Enoncé du problème . 3.19.

1. Le problème initial et notations . 3.19.

2. Espaces fonctionnels et résultats . 3.20.

3. Le problème variationnel associé . 3.23.

III.2. Problème approché par la méthode du domaine auxiliaire . 3.25.

III.3. Problème approché par la méthode de Galerkin . 3.36.

III.4. Problème approché par la méthode variationnelle des différences finies . 3.42.

1. Construction du problème approché . 3.42.

2. Majorations a priori et stabilité de la solution du problème P_{hk}. 3.48.

3. Convergence de u_{hk} vers une solution du problème initial . 3.54.

4. Exemple de construction du problème approché P_{hk}. 3.57.

III.5. Régularisation elliptique . 3.65.

1. Premier procédé de régularisation elliptique . 3.65.

2. Deuxième procédé de régularisation elliptique . 3.68.

CHAPITRE IV - EQUATIONS LINEAIRES DU SECOND ORDRE EN t.

I. Introduction . 4.1.

II. Equations d'évolution du second ordre en t dans un domaine cylindrique . 4.2.

II.1. Le problème initial variationnel . 4.2.

II.2. Problème approché (P_ϵ) par la méthode du domaine auxiliaire pour le problème de Dirichlet . 4.5.

II.3. Problèmes approchés (P_ϵ) par la méthode du domaine auxiliaire correspondant aux problèmes de Neumann et mêlés . 4.12.

III. Equations d'évolution du second ordre en t dans un domaine non cylindrique . Problème de Dirichlet . 4.15.

III.1. Le problème initial .

III.2. Construction d'un problème approché dans un domaine cylindrique par la méthode du domaine auxiliaire . 4.17.

III.3. Problème approché par la méthode de Galerkin 4.21.

III.4. Construction d'un problème approché par la méthode variationnelle des différences finies . 4.22.

1. Construction du problème approché . 4.23.

2. Inégalités a priori . 4.27.

3. Théorème de stabilité . 4.28.

4. Théorème de convergence faible . 4.29.

CHAPITRE V- APPLICATIONS NUMERIQUES A DES PROBLEMES PARABOLIQUES DANS UN DOMAINE NON CYLINDRIQUE

I.	Approximation d'un problème de Dirichlet en dimension un.	5.2.
	I.1. Le problème initial.	5.2.
	I.2. Problème approché par la méthode du domaine auxiliaire.	5.3.
	I.3. Problème approché par la méthode de Galerkin.	5.10.
II.	Approximation d'un problème de Dirichlet en dimension deux par la méthode du domaine auxiliaire.	5.15.
	II.1. Le problème initial	5.15.
	II.2. Problème approché	5.16.
III.	Etude comparative des différentes méthodes sur un problème de Dirichlet en dimension deux.	5.22.
	III.1. Le problème initial.	5.22.
	III.2. Problèmes approchés cylindriques par la méthode du domaine auxiliaire.	5.24.
	1. Premier choix des coefficients A_0, A_1 de $A_\varepsilon(u,v)$	5.26
	2. Deuxième choix des coefficients A_0, A_1 de $A_\varepsilon(u,v)$	5.28
	III.3. Problème approché par la méthode variationnelle des différences finies.	5.32.
	III.4. Régularisation elliptique.	5.37.
IV.	Conclusions.	5.44.

METHODES D'APPROXIMATION DES SOLUTIONS

DE CERTAINS PROBLEMES AUX LIMITES LINEAIRES

-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-:-

INTRODUCTION

-:-:-:-

Nous nous proposons dans ce travail d'étudier certains types d'approximation des solutions de problèmes aux limites stationnaires et d'évolution.

La première partie (Chapitres I et II) est consacrée à l'approximation de la solution de problèmes aux limites elliptiques par la méthode du "*domaine auxiliaire*". Le principe en est le suivant :

Soit A un opérateur différentiel linéaire elliptique d'ordre $2m$ dans un ouvert borné Ω de R^n, de frontière Γ supposée régulière. Nous cherchons à approcher la solution u de :

$$(P) \quad \begin{cases} A u = f & \text{dans } \Omega \\ B_j u = 0 & \text{sur } \Gamma, \quad j = 0,1,\dots,m-1 \quad \text{(conditions aux limites)} \end{cases}$$

Nous remplaçons le problème (P) par une famille de problèmes (P_ε) ($\varepsilon > 0$ petit) du type :

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon = f_\varepsilon & \text{dans un ouvert } D \text{ contenant } \Omega \\ \gamma_j u_\varepsilon = 0 & \text{sur } S \text{ frontière de } D, \; j = 0,1,\dots,m-1 \end{cases}$$

où A_ε est un opérateur différentiel elliptique d'ordre $2m$ dans D qui prolonge A à D, et $\gamma_j u_\varepsilon$ est la trace d'ordre j de u_ε sur S. Les coefficients de A_ε dans le "*domaine auxiliaire*" $D - \bar{\Omega}$ sont choisis

à partir de A et des conditions aux limites de (P). Pour certains choix (non limitatifs) de A_ε on montre la convergence de u_ε restreinte à Ω vers u, solution de (P), quand ε tend vers zéro. Dans certains cas on obtient l'évaluation de l'erreur : $u_\varepsilon|_\Omega - u = O(\sqrt{\varepsilon})$.

Au Chapitre II nous donnons des applications pratiques de cette méthode sur quelques problèmes simples. Nous avons résolu directement les problèmes (P) et (P_ε) par la méthode variationnelle des différences finies et comparé les résultats obtenus pour plusieurs choix de l'opérateur A_ε. Nous avons testé en particulier la méthode d'extrapolation de RICHARDSON qui fournit une nette amélioration des résultats.

La deuxième partie (Chapitres III, IV, et V) concerne les équations d'évolution linéaires du premier et du second ordre en t dans un domaine cylindrique et non cylindrique.

Le Chapitre III traite des problèmes mixtes pour les équations paraboliques. Soit $A(t)$ une famille d'opérateurs différentiels linéaires elliptiques d'ordre $2m$, $t \geq 0$. Nous cherchons à approcher la solution $u(x,t)$ de :

$$(P)\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) + A(t)\,u(t) = f(t) \text{ dans l'ouvert } \Omega(t), \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \text{ pour } x \in \Omega(0) \\ B_j\,u(t) = 0 \text{ sur la frontière } \Gamma(t) \text{ de } \Omega(t), \quad t > 0 \end{cases}$$

Au paragraphe II nous supposons que le domaine $\Omega(t)$ est indépendant du temps t ($\Omega(t) = \Omega$, $t \geq 0$) et nous généralisons la méthode du domaine auxiliaire à ce problème. Le principe de construction est semblable à celui énoncé pour les problèmes stationnaires; on est ramené à la résolution d'un problème de Dirichlet parabolique dans un domaine D contenant Ω.

Nous en démontrons la convergence lorsque $A(t)$ est un opérateur d'ordre deux et (P) un problème mêlé.

Nous considérons au paragraphe III le cas d'un domaine non cylindrique ($\Omega(t)$ variant avec t). Nous associons d'abord à (P) un problème varia-

tionnel faible dont nous démontrons l'unicité de la solution. Nous en construisons quatre procédés d'approximation dont chacun d'eux nous fournit à la limite une démonstration de l'existence de u. Le premier, par la méthode du domaine auxiliaire, nous ramène à la solution d'un problème parabolique dans un domaine ω arbitraire contenant $\Omega(t)$ pour $t \in [0,T]$, T positif fini, en prolongeant l'opérateur $A(t)$ à ω. Le second, qui est une généralisation de la méthode de Galerkin classique, revient à approcher $u(x,t)$ comme combinaison linéaire de "*fonctions de base*" $\varphi^i(x,t)$: $u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} u_i(t)\ \varphi^i(x,t)$; les $u_i(t)$ sont alors solutions d'un système de m équations différentielles linéaires d'ordre un. Une idée semblable est utilisée dans SATHER [18] pour les équations de Navier-Stokes. Le troisième procédé est une généralisation de la méthode variationnelle des différences finies, pour un domaine non cylindrique. Nous donnons une définition de la stabilité des schémas introduits ainsi que la démonstration des théorèmes de stabilité et convergence associés, analogues à ceux énoncés dans RAVIART [15] pour les problèmes cylindriques. Enfin un dernier procédé consiste à utiliser la "*régularisation elliptique*" cf. LIONS [10], [12], qui nous ramène à la résolution d'un problème aux limites elliptique dans le domaine $(\Omega(t)\ ,\ t \in [0T])$.

Nous avons fait la même étude au Chapitre IV pour les équations d'évolution linéaires du second ordre en t du type :

$$(P)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2}(t) + \dfrac{d}{dt}\left(B(t)\,u(t)\right) + A(t)\,u(t) = f(t) \text{ dans } \Omega(t),\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x)\ ;\ \dfrac{du}{dt}(x,0) = u_1(x)\ ,\ \text{pour tout } x \in \Omega(0) \\ B_j\,u(t) = 0 \text{ sur } \Gamma(t) \text{ frontière de } \Omega(t)\ ,\ j = 0,1,\ldots,m-1\ ;\ t > 0 \end{cases}$$

Nous avons d'abord construit la méthode du domaine auxiliaire lorsque $\Omega(t)$ est indépendant de t, puis les trois premiers procédés d'approximation analogues au chapitre III, quand $\Omega(t)$ varie avec t.

Au Chapitre V nous avons étudié numériquement sur quelques problèmes simples, les différents procédés d'approximation des problèmes paraboliques dans un ouvert non cylindrique. Une étude comparative de ces méthodes a été faite sur un problème plus élaboré. Il résulte de cette étude que la méthode

du d maine auxiliaire est la plus avantageuse : sa construction est simple et elle donne de bons resultats pour un temps de calcul peu élevé. La méthode de Galerkin est surtout applicable en dimension un où elle est très efficace. La méthode variationnelle des différences finies, de construction assez délicate mais très rapide, donne un précision médiocre surtout au voisinage de la frontière $\Gamma(t)$ de $\Omega(t)$. Enfin la régularisation elliptique qui fournit généralement de très bons résultats nécessite la résolution d'un gros systè-e saire d'où un temps de calcul très long.

Je suis heureux d'exprimer ici mes remerciements et ma profonde gratitude à Monsieur J L. LIONS qui m'a suivi et orienté au cours de mes recherches. C'est grâce à ses conseils que j'ai pu mener à bien ce travail.

Je remercie également Monsieur de POSSEL qui a bien voulu accepter la présidence de mon Jury et qui a facilité mon travail à l'Institut Blaise Pascal.

Mes remerciements vont aussi à Monsieur SCHUTZENBERGER qui m'a fait l'honneur de participer à mon Jury

Les essais numériques figurant dans ce travail ont été effectués sur les machines *IBM.* 704 puis *CDC* 3600 de l'INSTITUT BLAISE PASCAL.

CHAPITRE I

APPROXIMATION DE PROBLEMES AUX LIMITES ELLIPTIQUES

I - *Plan général d'étude* :

Etant donné un opérateur elliptique A dans un domaine Ω, de façon générale, nous nous proposons d'approcher les problèmes aux limites de type suivant :

$$(P) \quad \begin{cases} Au = f & \text{dans } \Omega \\ B_j u = 0 & \text{sur } \Gamma \text{, frontière de } \Omega . \end{cases}$$

Nous dirons que (P) est le "problème initial". Au problème (P) nous allons associer une famille de problèmes (P_ε), dits "problèmes approchés", résolus dans un ouvert D contenant Ω, dont la solution u_ε approchera, en un certain sens, la solution u de (P). Pour cela nous construirons des opérateurs A_ε prolongeant A à D et considérerons :

$$(P_\varepsilon) \quad \begin{cases} A_\varepsilon u_\varepsilon = \tilde{f} & \text{dans } D \\ \gamma_j u_\varepsilon = 0 & \text{sur } S \text{, frontière de } D . \end{cases}$$
$$j = 0, \ldots, m-1$$

où $\tilde{f}$ est le prolongement par zéro de f à D, et γ_j la trace d'ordre j de u_ε sur S :

$$\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial n_j}$$

Dans un premier stade nous décrirons notre méthode lorsque A est un opérateur elliptique d'ordre 2, avec des conditions aux limites homogènes de type Dirichlet, Neumann ou mêlées.

Puis nous montrerons comment on peut généraliser ce procédé à des opérateurs d'ordre $2m$ $(m > 1)$. Nous donnerons les résultats obtenus en prenant $A = \Delta^2$, l'opérateur biharmonique, avec différentes conditions aux limites.

Toute l'étude qui va suivre sera basée sur la formulation variationnelle des problèmes traités. (voir [7])

II - *Espaces utilisés et notations* :

Soit Ω un ouvert de R^n de frontière Γ assez régulière. On appelle :

. $\mathcal{D}(\Omega)$: l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Ω .

. $\mathcal{D}'(\Omega)$: son dual qui est l'espace des distributions sur Ω .

. $L^2(\Omega)$: l'~~espace des fonctions~~ de carré sommable sur Ω muni de la norme :

$$|u|^2 = |u|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |u|^2 dx$$

. $H^m(\Omega)$: $\{ u \mid u, D^p u \in L^2(\Omega) , |p| \leq m \}$

où
$$D^p u = \frac{\partial^p u}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_n^{p_n}} \quad \text{avec} \quad p = (p_1, \dots, p_n) \quad |p| = p_1 + \dots + p_n$$

les dérivées étant prises au sens des distributions sur Ω .

Les espaces $H^m(\Omega)$ (de SOBOLEV) sont des espaces de Hilbert munis du produit scalaire :

$$(\!(u,v)\!) = (\!(u,v)\!)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|p| \leq m} \int_\Omega D^p u \, . \, D^p \bar{v} \, dx \, .$$

Notation : $\|u\|_{H^m(\Omega)} = (\!(u,u)\!)^{1/2} = \|u\|$.

. $H_0^m(\Omega)$: l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$ pour la norme ci-dessus

. $H^{-m}(\Omega)$: dual de $H_0^m(\Omega)$.

Résultat I - 1 : Si $u \in H^m(\Omega)$, $\gamma_j u = \frac{d^j u}{dn_j} \in H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$

(voir [8] pour la définition de H^m , m non entier), où $\frac{d^j u}{dn_j}$ est la trace d'ordre j de u sur $\Gamma = \partial\Omega$;

et l'application :

$u \longrightarrow \vec{\gamma}_0 u = \{ \gamma u , \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u \}$ est linéaire continue de $H^m(\Omega)$

dans $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, surjective et de noyau $H_0^m(\Omega)$.

Résultat I - 2 : Si Ω est un ouvert très régulier [8] on démontre qu'il a la propriété de m-prolongement c.a.d. : pour tout $u \in H^m(\Omega)$, il existe une application linéaire continue P de $H^r(\Omega)$ dans $H^r(R^n)$ avec $0 \leq r \leq m$, telle que :

$$Pu = u \text{ presque partout sur } \Omega \text{ . ([7])}$$

III - *Formulation variationnelle du "problème initial"* :

A l'opérateur A et au problème (P) nous faisons correspondre le triplet $\{ V, a(u,v) , L(v) \}$ où :

. V est un espace de Hilbert .

. $a(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$, c'est-à-dire :

$$| a(u,v) | \leq M \| u \| . \| v \| \text{ pour tout } u, v \in V .$$

. $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V , (correspondant au second membre).

Le problème variationnel associé à ce triplet s'écrit :

Problème I - 1 : Trouver $u \in V$ tel que :

$(I-1)$ $\quad a(u,v) = L(v)$ pour tout $v \in V$.

Définition I - 1 : Nous dirons que $a(u,v)$ est V-elliptique si :

$(I-2)$ $\quad Re\ a(v,v) \geq \alpha \| v \|_V^2$ pour tout $v \in V$, $\alpha > 0$.

On a alors le :

Théorème I - 1 : Si la forme $a(u,v)$ est V-elliptique, le problème $I-1$ admet une solution unique [7] .

Pour chacun des problèmes variationnels associés à (P) ou (P_ε) nous vérifierons les hypothèses suivantes :

Hypothèse H0 : $a(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $V \times V$.

Hypothèse H1 : $a(u,v)$ est V- elliptique.

Hypothèse H2 : $L(v)$ est une forme linéaire continue sur V .

Hypothèse H3 : $a(u,v)$ et $L(v)$ ne contiennent pas d'intégrales de surface sur Γ , frontière de Ω .

Tous nos résultats s'appliqueront si $H3$ est vérifiée, ce qui nous limite aux problèmes homogènes.

Nous donnons maintenant quelques exemples de construction de problèmes variationnels à partir des problèmes formels (P) :

Exemple I - 1 : (*problème de Dirichlet*)

Soit $A = - \Delta = - \sum_{i=1}^{n} D_i^2$ avec $D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$

$$(I-3) \quad \begin{cases} - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \gamma_0 u = u|_\Gamma = 0 & \text{où } \Gamma = \partial \Omega \end{cases}$$

Nous prenons :

. $V = H_0^1(\Omega)$.

. $a(u,v) = \int_\Omega grad\ u \ .\ grad\ \bar{v}\ d\ \Omega$

. $L(v) = \int_\Omega f \ . \ \bar{v}\ d\ \Omega$. en supposant $f \in L^2(\Omega)$.

Au problème (P) correspond le triplet : $\{ V,\ a(u,v),\ L(v)\}$ et le problème variationnel (Q) :

$$(I-4) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in H_0^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega) \ . \end{cases}$$

Les hypothèses $(H0, \ldots, H3)$ sont facilement vérifiées dans ce cas d'où l'existence et l'unicité de u d'après le Thèorème $I-1$ . .

Résultat I - 3 : Les problèmes (P) et (Q) sont équivalents formellement. En fait u solution de $(I-4)$ vérifie la première équation de $(I-3)$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ avec en plus $\Delta u \in L^2(\Omega)$, et $u = 0$ dans $L^2(\Gamma)$ car $u \in H_0^1(\Omega)$.

Exemple I - 2 : (Problème de Neumann)

$$(I-5)\qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f \ \text{ dans } \ \Omega\ ,\ \lambda > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \ \text{ sur } \Gamma\ , \text{ où } \vec{n} \text{ est la normale extérieure à } \Omega \text{ sur } \Gamma\ . \end{cases}$$

On prend cette fois :

- $V = H^1(\Omega)$
- $a(u,v) = \int_\Omega (grad\ u \cdot grad\ \bar{v} + \lambda\, u\, \bar{v})\, dx$
- $L(v) = (f,v)_{L^2(\Omega)}$. $f \in L^2(\Omega)$.

A (P) correspond le triplet : $\{ H^1(\Omega)\ ,\ a(u,v)\ ,\ L(v) \}$ et le problème variationnel (Q) :

$$(I-6)\qquad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que :} \\ \quad a(u,v) = L(v) \ \text{ pour tout } \ v \in H^1(\Omega)\ . \end{cases}$$

On vérifie encore facilement les hypothèses $(H0,\ldots,H3)$ d'où l'existence et l'unicité de la solution u , ainsi que le :

Résultat I - 4 : Les problèmes (P) et (Q) sont équivalents formellement, la première équation étant vérifiée au sens des distributions de $\mathcal{D}'(\Omega)$ et la seconde formellement (par application de la formule de Grean).

De manière analogue on associerait un problème variationnel (Q) à des opérateurs A d'ordre $2m$ vérifiant des conditions aux limites homogènes.

Dans la suite nous approcherons le problème variationnel (Q) correspondant à (P) , par un problème variationnel (Q_ε) auquel nous associerons un problème opérationnel (P_ε) .

IV - *Approximations de problèmes aux limites elliptiques pour des opérateurs d'ordre 2* .

Nous considèrerons dans tout ce paragraphe des opérateurs A self-adjoints du type :

$$(I-7) \qquad A = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij} D_j) + a_0$$

sur lequel nous ferons les hypothèses suivantes :

$$(I-8) \qquad a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega) \quad \text{(mesurables et bornés dans } \Omega\text{)}$$

$$(I-9) \qquad Re \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \alpha > 0 .$$

$$(I-10) \qquad Re\, a_0(x) \geq \alpha_0 > 0 .$$

Les trois types de problèmes (P) que nous chercherons à approcher s'écrivent :

$$(I-11) \qquad Au = f \quad \text{dans } \Omega .$$

$$(I-12) \qquad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma \quad \text{- problème de DIRICHLET -}$$

ou

$$(I-13) \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j u \cos(\vec{n}, x_i) \quad \text{sur } \Gamma$$

- problème de NEUMANN -

ou

$$(I-14) \qquad u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \nu_A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_2 \text{ avec } \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

- problème MELE -

4 - 1. *Le problème initial variationnel (Q)* :

Soit $a(u,v)$ la forme sesquilinéaire associée à A :

$$(I-15) \qquad a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v}\, dx + \int_\Omega a_0\, u \cdot \bar{v}\, dx .$$

Nous prendrons pour espace V :

$$(I-12') \qquad V = H_0^1(\Omega) \quad \text{pour} \quad (I-12), (I-11)$$

$$(I-13') \qquad V = H^1(\Omega) \quad \text{pour} \quad (I-13), (I-11)$$

$$(I-14') \qquad V = \{u \mid u \in H^1(\Omega), \text{ et } u = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \text{ pour } (I-14) (I-11).$$

Au problème (P) nous associons le triplet $\{V, a(u,v), L(v)\}$ et le problème variationnel (Q):

$(I-16)$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Déterminer } u \in V \text{ tel que :} \\ a(u,v) = L(v) = (f,v)_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in V. \end{array} \right.$

Hypothèse L : $f \in L^2(\Omega)$ (ou bien $f \in H^{-1}(\Omega)$; les démonstrations resteraient identiques).

Vérifions les hypothèses H :

. $H0$: elle découle de l'hypothèse $(I-8)$ faite sur a_{ij}, a_0 et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

. $H1$: on a :

$$Re\ a(v,v) = \int_\Omega Re \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j v . D_i \bar{v}\ dx + \int_\Omega Re\ a_0(x) |v|^2\ dx .$$

$$Re\ a(v,v) \geq inf\ (\alpha, \alpha_0)\ \|v\|^2_{H^1(\Omega)} = \beta \|v\|^2_V \quad \text{d'après } (I-9) \text{ et } (I-10).$$

. $H2$: $|L(v)| = |(f,v)_{L^2(\Omega)}| \leq |f|_{L^2} . |v|_{L^2} \leq |f|_{L^2} . \|v\|_V$.

. $H3$: est vérifiée de par le choix de $a(u,v)$.

D'après le Théorème $I-1$, on a le :

Résultat I - 5 : Le problème initial (Q) admet une solution unique u appartenant à V .

4 - 2 . *Idées générales sur le problème approché* (Q_ε) :

Nous considèrerons un ouvert *quelconque* $\Omega_1 \subset \complement_{\mathbb{R}^n} \bar{\Omega}$ et D l'intérieur de $\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1$. Soit S la frontière de D .

Nous construirons une forme sesquilinéaire $A_\varepsilon(u,v)$ ayant les propriétés suivantes (non suffisantes) :

$(I-17)$ $A_\varepsilon(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H^1(D) \times H^1(D)$.

$(I-18)$ La restriction de $A_\varepsilon(u,v)$ à $V \times V$, défini en $3-1$, coïncide avec $a(u,v)$ au sens suivant :
si $\tilde{u}$ est le prolongement de u par 0 en dehors de Ω :

$A_\varepsilon(\widetilde{u},\widetilde{v}) = a(u,v)$ pour tout $u,v \in V$ et *nulles au voisinage de* Γ dans Ω .

(I-19) $Re\ A_\varepsilon(v,v) \geq \alpha_1 \| v \|^2_{H^1(D)}$ pour tout $v \in V(D)$ défini ci-dessous. $\alpha_1 > 0$

Le problème approché dans D s'écrira : (Q_ε)

(I-20) $\begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in V(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon,v) = \widetilde{L}(v) = (\widetilde{f},v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in V(D). \end{cases}$

Sous les hypothèses : (I-17), (I-18), (I-19) on a le théorème :

Théorème I-2 : Le problème approché variationnel (Q_ε) admet une solution unique, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé.

Démonstration : Toutes les hypothèses du Théorème I-1 sont vérifiées car :

$$|\widetilde{L}(v)| \leq |(\widetilde{f}, v)| \leq |f|_{L^2(\Omega)} \cdot \| v \|_{H^1(D)}.$$

Nous avons le choix de $V(D)$, suivant que nous désirons approcher (Q) par un problème de Dirichlet, Neumann ou autre. Dans toutes nos démonstrations nous prendrons $V(D) = H^1_0(D)$, qui nous intéresse le plus au point de vue pratique, les démonstrations se transposant facilement si $V(D) = H^1(D)$.

4-3. *Constructions de problèmes (Q_ε) approchant un problème de DIRICHLET* .

Nous donnerons plusieurs choix (non limitatifs) de "formes approchées", pour lesquelles on démontrera la convergence de u_ε restreint à Ω vers u .

De façon générale nous prendrons :

$$(I-21)\quad A_\varepsilon(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D (A_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v} + A_0 u \cdot \bar{v})\, dx$$

premier choix de A_{ij} , A_0 :

$$(I-22)\quad \begin{cases} A_{ij} = \begin{cases} a_{ij} \text{ dans } \Omega \ , \ \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1 \text{ si } i=j \\ 0 \text{ si } i \neq j) \end{matrix} \\ A_0 = \begin{cases} a_0 \text{ dans } \Omega \ , \ \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \end{cases} \end{cases}$$

deuxième choix de A_{ij} , A_0 :

(I-23) $A_{ij} = \{ a_{ij}$ dans Ω , $\frac{1}{\varepsilon}\delta_{ij}$ dans $\Omega_1 \}$

$A_0 = \{ a_0$ dans Ω , $\frac{1}{\varepsilon}$ dans $\Omega_1 \}$

troisième choix de A_{ij} , A_0 :

(I-24) $A_{ij} = \{ a_{ij}$ dans Ω , $\frac{1}{\varepsilon}$ dans $\Omega_1 \}$

$A_0 = \{ a_0$ dans Ω , 0 dans $\Omega_1 \}$

Nous démontrerons l'équivalence de ces deux derniers choix de A_{ij} et A_0 .

4-3-1 . *Premier problème approché* (Q_ε) *correspondant à* (I-22).

La "forme approchée" $A_\varepsilon(u,v)$ s'écrit pour $u,v \in H_0^1(D)$:

$$(I-25) \quad A_\varepsilon(u,v) = \sum_{i,j=1} \int_\Omega a_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v}\, dx + \int_\Omega a_0\, u \cdot \bar{v}\, dx + \int_{\Omega_1} grad\, u \cdot grad\, \bar{v}\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} u \cdot \bar{v}\, dx$$

et le problème approché (Q_ε) qui lui correspond :

$$(I-26) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v) \text{ pour tout } v \in H_0^1(D) \\ \text{avec } \tilde{f} = \{ f \text{ dans } \Omega \ , \ 0 \text{ dans } \Omega_1 \} \end{cases}$$

Résultat I-6 : Pour ε positif fixé, (Q_ε) admet une solution unique.

Démonstration : Vérifions les hypothèses du Théorème I-2 ; la seule chose non triviale est la coercivité :

$$Re\, A_\varepsilon(v,v) = Re\, a(v,v) + \int_{\Omega_1} |grad\, v|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} |v|^2 dx$$

$$\geq inf(\alpha, \alpha_0) \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + inf(1, \frac{1}{\varepsilon}) \|v\|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

$$Re\, A_\varepsilon(v,v) \geq inf(\alpha, \alpha_0, \frac{1}{\varepsilon}) \|v\|^2_{H^1(D)} .$$

L'approximation est justifiée par les deux théorèmes suivants :

Théorème I-3 : de convergence faible : quand $\varepsilon \to 0$, la restriction de u_ε à Ω (notée $u_\varepsilon|_\Omega$) converge faiblement vers u, solution du problème initial (Q) , dans $H^1(\Omega)$ et $\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1}$ converge faiblement dans $L^2(\Omega_1)$ vers une fonction g .

Démonstration :

Dans $(I-26)$ prenons $v = u_\varepsilon$ ce qui est loisible car $u_\varepsilon \in H_0^1(D)$ d'après le Résultat $I-6$. Il vient :

$$Re\ A_\varepsilon (u_\varepsilon, u_\varepsilon) = Re\ (\tilde{f}, u_\varepsilon)$$

Soit :

$$Re\ a(u_\varepsilon|_\Omega\ ,\ u_\varepsilon|_\Omega) + \int_{\Omega_1} |grad u_\varepsilon|^2 dx + \int_{\Omega_1} \left| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right|^2 dx = Re \int_\Omega f\, \bar{u}_\varepsilon\, dx\ .$$

En tenant compte de la coercivité de $a(u,v)$, on a :

$$inf\ (\alpha, \alpha_0)\ \|u_\varepsilon|_\Omega\|^2_{H^1(\Omega)} + |grad u_\varepsilon|_{\Omega_1}|^2_{L^2(\Omega_1)} + \left| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right|_{\Omega_1}\Big|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

$$\leqslant |f|_{L^2(\Omega)}\ \|u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leqslant |f|_{L^2(\Omega)}\ \|u_\varepsilon\|_{H^1(D)}$$

D'où l'on déduit que : $\|u_\varepsilon\|_{H^1(D)}$, $\left| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right|_{L^2(\Omega_1)}$ sont bornés indépendamment de ε . On peut alors extraire une sous-suite $\eta \longrightarrow 0$ telle que :

$(I-27)$ $\quad u_\eta \rightharpoonup w$ dans $H_0^1(D)$ faible .

$(I-28)$ $\quad \left(\frac{u_\eta}{\sqrt{\eta}} \right)_{\Omega_1} \rightharpoonup g$ dans $L^2(\Omega_1)$ faible.

$(I-27)$ entraîne que : $u_\eta|_{\Omega_1} \rightharpoonup w|_{\Omega_1}$ dans $L^2(\Omega_1)$ faible

et $(I-28)$: $u_\eta|_{\Omega_1} = \left(\frac{u_\eta}{\sqrt{\eta}} \right)_{\Omega_1} \sqrt{\eta} \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\Omega_1)$ faible.

Soit $w|_{\Omega_1} \equiv 0$. Comme $w \in H_0^1(D)$ on peut définir sa trace sur Γ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ et $w|_\Gamma = 0$, d'où $\underline{w|_\Omega \in H_0^1(\Omega)}$.

• Montrons que $w|_\Omega$ coïncide avec u , c.a.d. est solution de $(\mathcal{Q})$:

Reprenons $(I-26)$ avec $\tilde{v} = \{ v$ dans Ω , 0 dans $\Omega_1 \}$ où $v \in H_0^1(\Omega)$.

On a : $\tilde{v} \in H_0^1(D)$ et il vient :

$$a(u_\varepsilon|\,\Omega\ ,\ v) = (f, v)_{L^2(\Omega)}$$

D'après (I-27) quand $\varepsilon = \eta \to 0$:

$$a(u_\eta|_\Omega , v) \to a(w|_\Omega , v)$$

et à la limite :

$$a(w|_\Omega , v) = (f , v) \quad \text{pour tout} \quad v \in H_0^1(\Omega) .$$

Soit $w = u$ d'après l'unicité de $(\mathcal{Q})$.

. Ceci étant vrai pour toute suite $\eta \to 0$, c'est vrai aussi pour la suite initiale $\varepsilon \to 0$ car la limite est indépendante de la sous-suite.

Théorème I-4.de convergence forte : quand $\varepsilon \to 0$:

(I-29) $\quad u_\varepsilon|_\Omega \to u$ dans $H^1(\Omega)$ fort .

(I-30) $\quad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} |_{\Omega_1} \to 0$ dans $L^2(\Omega_1)$ fort.

Démonstration : Soit l'opérateur $N = \{1$ dans Ω , 0 dans $\Omega_1 \}$ et introduisons :

$$X_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon - Nu , u_\varepsilon - Nu)$$

qui est bien défini car $Nu \in H_0^1(D)$ pour $u \in H_0^1(\Omega)$

$$X_\varepsilon = A_\varepsilon (u_\varepsilon , u_\varepsilon) - 2Re\, A_\varepsilon (u_\varepsilon , Nu) + A_\varepsilon(Nu , Nu)$$

En tenant compte de (I-26) avec $v = u_\varepsilon$ et de (I-18) il vient :

$$Re\, X_\varepsilon = Re(\tilde{f} , u_\varepsilon)_{L^2(D)} - 2Re\; a(u_\varepsilon|_\Omega , u) + Re\, a(u,u)$$

Appliquons le Théorème I-3. Quand $\varepsilon \to 0$:

$$Re\, X_\varepsilon \to Re(f,u)_{L^2(\Omega)} - 2Re\, a(u,u) + Re\, a(u,u)$$
$$= 0 \quad \text{d'après (I-16)}$$

Soit : $Re\, X_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Mais :

$$Re\, X_\varepsilon = Re\, a(u_\varepsilon|_\Omega - u,\, u_\varepsilon|_\Omega - u) + |grad u_\varepsilon|^2_{\Omega_1 L^2(\Omega_1)} + |\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

$$Re\, X_\varepsilon \geq \alpha \, \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|^2_{H^1(\Omega)} + |grad u_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_1)} + |\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

D'où (I-29) et (I-30) avec en plus :

$$u_\varepsilon|_{\Omega_1} \to 0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega_1)$$

C.Q.F.D.

Dans ce cas on ne peut avoir de majoration de l'erreur $u_\varepsilon|_\Omega - u$, u_ε étant de l'ordre $\sqrt{\varepsilon}$ dans $L^2(\Omega_1)$ seulement .

4-3-2-. *Deuxième problème approché correspondant au choix (I-23) de A_{ij}, A_0 :*

$A_\varepsilon(u,v)$ s'écrit alors :

$$A_\varepsilon(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_j u \cdot D_i \bar{v}\, dx + \int_\Omega a_0 u \bar{v}\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} (\mathrm{grad} u \cdot \mathrm{grad} \bar{v} + u \bar{v})\, dx$$

ou :

$$A_\varepsilon(u,v) = a(u|_\Omega , v|_\Omega) + \frac{1}{\varepsilon} ((u, v))_{H^1(\Omega_1)} . \qquad (I-31)$$

Le problème approché $(\mathcal{Q}_\varepsilon)$ devient :

$$(I-32) \quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \text{ dans } H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(D) \end{cases}$$

Résultat I-7 : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, $(\mathcal{Q}_\varepsilon)$ admet une solution unique.

Démonstration : Vérifions la coercivité de A_ε ; d'après (I-31)

$$(I-33) \quad Re\, A_\varepsilon(v,v) = Re\, a(v|_\Omega , v|_\Omega) + \frac{1}{\varepsilon} \|v\|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

$$Re\, A_\varepsilon(v,v) \geq \inf\left(\alpha, \alpha_0, \frac{1}{\varepsilon}\right) \|v\|^2_{H^1(D)}$$

d'où le résultat d'après le Théorème I-1 .

Nous allons démontrer maintenant un théorème qui nous donnera directement la convergence forte et une majoration de l'erreur :

Théorème I-5 : Soient u, u_ε solutions de (I-16) , (I-32) respectivement ; on a :

$$(I-34) \quad \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

$$(I-35) \quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq c_1 \sqrt{\varepsilon}$$

c, c_1 : constantes ne dépendant que des données.

Démonstration :

. Prenons $v = u_\varepsilon \in H_0^1(D)$ dans $(I-32)$:

$$Re\ A_\varepsilon (u_\varepsilon, u_\varepsilon) = Re\ (\tilde{f}, u_\varepsilon)$$

D'après $(I-33)$ il vient en posant $\beta = inf\ (\alpha, \alpha_0)$:

$$\beta \| u_\varepsilon|_\Omega \|^2_{H^1(\Omega)} + \| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} |_{\Omega_1} \|^2_{H^1(\Omega_1)} \leq |f|_{L^2(\Omega)} \cdot \| u_\varepsilon \|_{H^1(\Omega)} .$$

D'où l'on déduit :

$$(I-36) \qquad \| u_\varepsilon|_\Omega \|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{|f|}{\beta}$$

$$(I-37) \qquad \| u_\varepsilon|_{\Omega_1} \|_{H^1(\Omega_1)} \leq \sqrt{\varepsilon}\, \frac{|f|}{\sqrt{\beta}} .$$

. L'application $u_\varepsilon|_{\Omega_1} \to \gamma_0\ u_\varepsilon$ (trace de u_ε sur le bord de Ω_1) est linéaire continue de : $H^1(\Omega_1) \to H^{1/2}(\partial\,\Omega_1)$, d'après le Résultat $I-1$.

D'où : $$\| \gamma_0\, u_\varepsilon \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq c_2 \| u_\varepsilon |_{\Omega_1} \|_{H^1(\Omega_1)}$$

et en tenant compte de $(I-36)$:

$$(I-38) \qquad \| \gamma_0\, u_\varepsilon \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq k\sqrt{\varepsilon} \quad \text{avec} \quad k = c_2 |f| / \sqrt{\beta} .$$

. Considérons maintenant : $w = u_\varepsilon|_\Omega - u$, défini dans $H^1(\Omega)$.

Dans Ω, w vérifie :

$$Aw = 0 \quad \text{dans} \quad H^{-1}(\Omega)$$

$$w|_\Gamma = \gamma_0\, w = \gamma_0\, u_\varepsilon \quad , \text{ car } u = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ , dans } H^{1/2}(\Gamma) .$$

L'application $w \to Aw \times \gamma_0\, w$ est un *isomorphisme* de :

$$H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times H^{1/2}(\Gamma) \qquad \text{(voir [13])}$$

d'où : $$\| w \|_{H^1(\Omega)} \leq c_3 \| \gamma_0 w \|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \text{car } Aw = 0 .$$

Soit : $$\| u_\varepsilon|_\Omega - u \|_{H^1(\Omega)} \leq c_3 \| \gamma_0 u_\varepsilon \|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

et d'après (I - 38) :

$$\| u_\varepsilon|_\Omega - u \|_{H^1(\Omega)} \leq c_3 k \sqrt{\varepsilon} \quad \text{ce qui est (I - 34)}$$

. (I - 35) nous est donnée par (I - 37). D'où le théorème.

4-3-3. *Troisième problème approché associé à (I - 24)* :

$A_\varepsilon(u,v)$ devient :

$$A_\varepsilon(u,v) = a(u|_\Omega, v|_\Omega) + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Omega_1} grad u \cdot grad \bar{v}\, dx$$

Tous les résultats obtenus en 4-3-2 sont encore valables. Il suffit pour cela de prendre comme norme dans $H^1(\Omega_1)$:

$$\| u \|^2_{H^1(\Omega_1)} = \int_{\Omega_1} |grad\ u|^2 dx$$

Cette norme est équivalente à la norme de $H^1(\Omega_1)$ définie au § II d'après l'inégalité de Friedrichs :

$$|u|^2_{L^2(\Omega_1)} \leq c(\Omega_1)\int_{\Omega_1} |grad u|^2 d\Omega$$

pour toute fonction u nulle sur une partie non vide de la frontière de Ω_1 (ici S) .

Remarque I - 1 : Tout ce qui a été dit est encore valable si Ω_1 est adjacent à Ω suivant la figure ci-contre :

4-3-4. *Problèmes formels équivalents à (Q_ε)* :

Nous donnons sans démonstration les problèmes (P_ε) équivalents formellement à (Q_ε) . Il suffit, pour le voir, d'appliquer la formule de Green à chacun des cas.

Pour le premier problème approché correspondant au choix (I - 22) de A_{ij} , A_0 , (P_ε) s'écrit :

$$(P_\varepsilon^1)\begin{cases}(1) & Au_\varepsilon = f \quad \text{pour} \quad x \in \Omega \\ (2) & -\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} u_\varepsilon = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \Omega_1 \quad \text{domaine auxiliaire} \\ (3) & [u_\varepsilon]_{\Gamma,\Omega} = [u_\varepsilon]_{\Gamma,\Omega_1} \\ (4) & [\frac{du_\varepsilon}{d\nu_A}]_{\Gamma,\Omega} = [\frac{du_\varepsilon}{dn}]_{\Gamma,\Omega_1}\end{cases}$$

où $[u]_{\Gamma,\Omega_i}$ désigne la valeur de u sur Γ prise du côté de Ω_i .

Pour le deuxième choix $(I-23)$ de A_{ij} , A_0 , (P_ε) s'écrit :

$$(P_\varepsilon^2)\begin{cases}(1) & Au_\varepsilon = f \quad \text{pour} \quad x \in \Omega . \\ (2) & -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = 0 \quad \text{pour} \quad x \in \Omega_1 . \\ (3) & [u_\varepsilon]_{\Gamma,\Omega} = [u_\varepsilon]_{\Gamma,\Omega_1} . \\ (4) & [\frac{du_\varepsilon}{d\nu_A}]_{\Gamma,\Omega} = \frac{1}{\varepsilon}[\frac{du_\varepsilon}{dn}]_{\Gamma,\Omega_1} .\end{cases}$$

Pour le choix $(I-24)$ de A_{ij}, A_0 , (2) est simplement remplacée par (2') : $-\Delta u_\varepsilon = 0$ dans Ω_1 , les autres étant inchangées.

4-4 . *Approximation d'un problème de NEUMANN* :

Le problème initial formel s'écrit : $(I-11),(I-13)$:

$$(I\text{-}39)\begin{cases} Au = f \quad \text{dans } \Omega \\ \frac{du}{d\nu_A} = 0 \quad \text{sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases} \qquad (P)$$

et sous forme variationnelle $(I-15),(I-13')$:

$$(I-40)\begin{cases} a(u,v) = (f,v) \quad \text{pour tout} \quad v \in H^1(\Omega) \\ u \in H^1(\Omega) \ ? \end{cases} \qquad (Q)$$

D'après le Résultat $I-5$, (Q) admet une solution unique. Nous considérons toujours $A_\varepsilon(u,v)$ défini en $(I-21)$:

$$A_\varepsilon(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D A_{ij} D_j u \cdot D_i \bar{v}\, dx + \int_D A_0\, u\bar{v}\, dx$$

et (Q_ε) défini par :

$$(I\text{-}20)\quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(D). \end{cases}$$

Choix de A_{ij}, A_0 : Nous prendrons :

$$(I\text{-}41)\quad A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega \ , \varepsilon\, \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1\}.$$

$$(I\text{-}41')\quad A_0 = \{a_0 \text{ dans } \Omega \ , \varepsilon \text{ dans } \Omega_1\}.$$

Résultat I-8 : Le problème approché (Q_ε) : $((I-20),(I-41),(I-41'))$ admet une solution unique pour tout ε positif fixé.

démonstration : Vérifions la coercivité de $A_\varepsilon(u,v)$

$$Re\ A_\varepsilon(v,v) = Re\ a(v|_\Omega, v|_\Omega) + \varepsilon\, (\!(v|_{\Omega_1}, v|_{\Omega_1})\!)_{H^1(\Omega_1)}$$

$$\geq inf\ (\alpha, \alpha_0)\ \|v\|^2_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|v\|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

$$Re\ A_\varepsilon(v,v) \geq inf\ (\alpha, \alpha_0, \varepsilon)\ \|v\|^2_{H^1(D)}$$

le Résultat suit.

Théorème I-6 : de convergence forte :

Si u, u_ε sont les solutions respectives de $(I-40)$ et $(I-20)$

$$(I\text{-}42)\quad \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \quad \text{où } c \text{ et } K \text{ sont des constantes indépendantes de } \varepsilon.$$

$$(I\text{-}43)\quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq K$$

Démonstration : Soit $v \in H_0^1(D)$. Cela implique : $v|_\Omega \in H^1(\Omega)$, et $v|_\Omega, v$ vérifient respectivement $(I-40)$ et $(I-20)$; d'où par différence :

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) - a(u, v|_\Omega) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} - (f, v|_\Omega)_{L^2(\Omega)} = 0$$

car $\tilde{f} = 0$ dans Ω_1 et $= f$ dans Ω.

Ce qui peut encore s'écrire :

$$a(u_\varepsilon|_\Omega, v|_\Omega) + \varepsilon (\!(u_\varepsilon|_{\Omega_1}, v|_{\Omega_1})\!)_{H^1(\Omega_1)} - a(u, v|_\Omega) = 0.$$

$$(I\text{-}44)\quad a(u_\varepsilon|_\Omega - u, v|_\Omega) + \varepsilon (\!(u_\varepsilon|_{\Omega_1}, v)\!)_{H^1(\Omega_1)} = 0$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$.

. Choisissons v dans $(I-44)$:

L'ouvert Ω étant supposé très régulier ([8]) il existe un opérateur linéaire continu P (de $\{1-$ prolongement) d'après le Résultat $I-2$,

$u \rightarrow Pu$ de :

$H^1(\Omega) \rightarrow H^1(R^n)$ tel que :

$Pu = u$ dans Ω .

Soit ψ , une fois continûment différentiable dans R^n , telle que :

$\psi = \{1$ dans Ω , 0 sur S bord de $D\}$. Une telle fonction existe et n'est pas unique.

Posons : $\theta u = \psi (Pu)$.

- $\theta u \in H_0^1(D)$ car $\begin{cases} Pu \in H^1(R^n) & \text{et } \psi \text{ est bornée} \\ \psi = 0 & \text{sur } S = \partial D . \end{cases}$

- $\| \theta u \|_{H^1(D)} \leq c_1 \| Pu \|_{H^1(R^n)} \leq c_2 \| u \|_{H^1(\Omega)}$

$$\| \theta u \|_{H^1(D)} \leq c_2 \| u \|_{H^1(\Omega)} . \qquad (I-45)$$

. Prenons dans $(I-44)$: $v = u_\varepsilon - \theta u$. On a bien $v \in H_0^1(D)$ (par construction); en reportant il vient :

$$a(u_\varepsilon|_\Omega - u,\ u_\varepsilon|_\Omega - u) + \varepsilon (\!(u_\varepsilon|_{\Omega_1} , u_\varepsilon|_{\Omega_1} - \theta u|_{\Omega_1})\!) = 0$$

D'où : $Re\ a(u_\varepsilon|_\Omega - u,\ u_\varepsilon|_\Omega - u) + \varepsilon \| u_\varepsilon|_{\Omega_1} \|^2 - \varepsilon Re\ (\!(u_\varepsilon|_{\Omega_1} ,\ \theta u|_{\Omega_1})\!) = 0$

D'autre part :

$$Re\ (\!(u_\varepsilon|_{\Omega_1}, \theta u|_{\Omega_1})\!) = -\frac{1}{2} \| u_\varepsilon|_{\Omega_1} - \theta u|_{\Omega_1} \|^2_{H^1(\Omega_1)} + \frac{1}{2} \| u_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega_1)} + \frac{1}{2} \| \theta u \|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

en remplaçant on obtient :

$$Re\ a(u_\varepsilon|_\Omega - u,\ u_\varepsilon|_\Omega - u) + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega_1)} + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon - \theta u \|^2_{H^1(\Omega_1)} = \frac{\varepsilon}{2} \| \theta u \|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

Minorons en tenant compte de la coercivité de $a(u,v)$:

$$\beta \| u_\varepsilon|_\Omega - u \|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon \|^2_{H^1(\Omega_1)} + \frac{\varepsilon}{2} \| u_\varepsilon - \theta u \|^2_{H^1(\Omega_1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \| \theta u \|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

D'après $(I-45)$:

$$\| \theta u \|_{H^1(\Omega_1)} \leq \| \theta u \|_{H^1(D)} \leq c_2 \| u \|_{H^1(\Omega)} .$$

De plus u étant solution de $(I-40)$:

$$\beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq Re\ a(u,u) \leq |f|\ \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

Soit :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{|f|}{\beta} .$$

Par conséquent :

$$\beta\ \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{\varepsilon}{2}\ \|u_\varepsilon - \theta u\|^2_{H^1(\Omega_1)} + \frac{\varepsilon}{2}\|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega_1)} \leq c_3\ \varepsilon$$

où $c_3 = c_2^2\ \dfrac{|f|^2}{2\ \beta^2}$

On en déduit :

$$(I-42)\quad \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H^1(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon} \quad \text{où} \quad c = \frac{c_2\ |f|}{\beta\ \sqrt{2\beta}} .$$

$$(I-43)\quad \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq K \quad \text{avec} \quad K = c_2\ \frac{|f|}{\beta}$$

ce qui démontre le Théorème.

En conclusion en faisant tendre ε vers zéro, on a approché le problème de Neumann (Q) par un problème de Dirichlet résolu dans un domaine plus grand D, tel que l'approximation soit convergente.

. *Problème formel équivalent à* (Q_ε) $(I-20), (I-41), (I-41')$

On vérifie par application formelle de la formule de Green que (Q_ε) est équivalent à :

$$(P_\varepsilon)\quad \begin{cases} (1) & Au_\varepsilon = f \ \text{ dans } \ \Omega . \\ (2) & -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon = 0 \ \text{ dans } \ \Omega_1 . \\ (3) & [u_\varepsilon]_{\Gamma,\Omega} = [u_\varepsilon]_{\Gamma,\Omega_1} . \\ (4) & [\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu_A}]_{\Gamma,\Omega} = \varepsilon\ [\dfrac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}]_{\Gamma,\Omega_1} \end{cases}$$

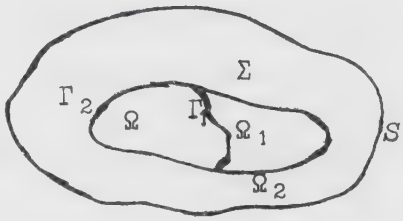
Remarque I-2 : D'autres choix de A_{ij} , A_0 sont possibles, pour lesquels on obtient des résultats de convergence moins forts; par exemple :

$$\begin{cases} A_{ij} = \{ a_{ij} \text{ dans } \Omega \ , \ \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \} \\ A_0 = \{ a_0 \text{ dans } \Omega \ , \ \varepsilon \text{ dans } \Omega_1 \} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{ij} = \{ a_{ij} \text{ dans } \Omega \ , \ \varepsilon\, \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \} \\ A_0 = \{ a_0 \text{ dans } \Omega \ , \ 0 \text{ dans } \Omega_1 \} \end{cases}$$

4 - 5 . *Approximation d'un problème mêlé* :

Problème initial : Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. (P) s'écrit :



$$(I-11) \qquad Au = f \quad \text{dans } \Omega$$

$$(I-14) \qquad u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \ , \ \frac{du}{d\nu_A} = 0 \text{ sur } \Gamma_2$$

et le problème variationnel associé (Q):

$$(I-46) \qquad \begin{cases} a(u, v) = (f, v)_{L^2(\Omega)} \text{ pour tout } v \in V_0 \ , \ u \in V_0 \ ? \\ \text{avec } V_0 = \{ v \mid v \in H^1(\Omega) , v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \} \end{cases}$$

On a démontré que (Q) admettait une solution unique.

Problème approché (Q_ε) :

Soit Ω_1 ouvert $\subset \complement\, \bar{\Omega}$ tel que Ω_1 ait Γ_1 comme frontière commune avec Ω . Puis Ω_2 ouvert $\subset \complement\, (\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1)$, de frontière extérieure S. Posons :

$$D = \Omega \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \overset{\circ}{\Gamma}_1 \cup \overset{\circ}{\Sigma} \cup \overset{\circ}{\Gamma}_2 \ .$$

Considérons toujours $A_\varepsilon(u,v)$ défini en $(I-21)$. Le problème approché variationnel (Q_ε) s'écrit :

$$(I-47) \qquad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in H_0^1(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(D) \end{cases}$$

où :

$$(I-48) \qquad A_{ij} = \{ a_{ij} \text{ dans } \Omega \ , \ \frac{1}{\varepsilon}\ \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1, \varepsilon\, \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_2 \}$$

$$(I-49) \qquad A_0 = \{ a_0 \text{ dans } \Omega \ , \ \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \ , \ \varepsilon \text{ dans } \Omega_2 \}$$

Résultat I-9 : $(\mathcal{Q}_\varepsilon)$ admet une solution unique pour tout ε positif fixé.

Démonstration : On vérifie les hypothèses du théorème $I-2$. La seule chose non triviale est la coercivité ; mais on a :

$$Re\ A_\varepsilon(v, v) \geq inf\ (\alpha, \alpha_0, \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}) \| v \|^2_{H^1(D)}$$

d'où le résultat pour ε fixé.

On démontre alors le théorème suivant (voir [9]).

Théorème I-7. de convergence faible : Quand $\varepsilon \to 0$,

$$(I-50) \qquad u_\varepsilon|_\Omega \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ faible.}$$

$$(I-51) \qquad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1} \longrightarrow g \text{ dans } H^1(\Omega_1) \text{ faible.}$$

$$(I-52) \qquad \sqrt{\varepsilon}\ u_\varepsilon|_{\Omega_2} \longrightarrow h \text{ dans } H^1(\Omega_2) \text{ faible}$$

où g et h sont des fonctions de $H^1(\Omega_1)$ et $H^1(\Omega_2)$ respectivement.

Démontrons à partir de ce théorème le :

Théorème I-8. de convergence forte : Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$,

$$(I-53) \qquad u_\varepsilon|_\Omega \to u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ fort}$$

$$(I-54) \qquad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1} \to 0 \text{ dans } H^1(\Omega_1) \text{ fort.}$$

$$(I-55) \qquad \sqrt{\varepsilon}\ u_\varepsilon|_{\Omega_2} \to 0 \text{ dans } H^1(\Omega_2) \text{ fort.}$$

Démonstration : Soit u solution de $(I-46)$ et $\tilde{u}$ défini dans $H^1(\Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma}_1)$ par :

$$\tilde{u} = \{ u \text{ dans } \Omega \ , \ 0 \text{ dans } \Omega_1 \}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{u} = 0 \text{ sur } \Sigma \ .$$

Posons $\Omega^* = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{\circ}{\Gamma}_1$ et prolongeons $\tilde{u}$ de Ω^* à D :

Il existe (Résultat I-2) une application linéaire continue P

$$v \longrightarrow Pv$$

de $H^1(\Omega^*) \longrightarrow H^1(R^n)$ telle que : $Pv = v$ dans Ω^*.

(pour Ω^*, donc Ω et Ω_1 assez réguliers)

Soit $\psi \in C^1(D)$ telle que $\psi = \begin{cases} 1 \text{ sur } \Omega^*. \\ 0 \text{ sur } S = \partial D. \end{cases}$

et posons:

$$\mathcal{O}\, u = \psi \cdot (P\tilde{u})$$

. $\mathcal{O}\, u \in H_0^1(D)$ d'après le choix de ψ et le fait que $P\tilde{u} \in H^1(R^n)$.

. $\mathcal{O}\, u = P\,\tilde{u} = u$ sur Ω.

. $\mathcal{O}\, u = \psi\,(P\tilde{u}) = 0$ sur Ω_1 car $\tilde{u} = 0$ dans Ω_1.

Considérons Z_ε:

$$Z_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon - \mathcal{O}\, u,\ u_\varepsilon - \mathcal{O}\, u)$$

$$Z_\varepsilon = A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - 2\, Re\, A_\varepsilon\,(u_\varepsilon,\ \mathcal{O}\, u) + A_\varepsilon(\mathcal{O}\, u,\ \mathcal{O}\, u)$$

u_ε étant solution de (I-47) on a :

$$Re\ Z_\varepsilon = Re\ (\tilde{f}, u_\varepsilon) - 2\ Re\ (\tilde{f}, \mathcal{O}\, u) + Re\ A_\varepsilon\ (\mathcal{O}\, u, \mathcal{O}\, u).$$

. *Montrons que* $Re\ Z_\varepsilon \longrightarrow 0$ *quand* $\varepsilon \longrightarrow 0$:

- D'après (I-50) : $(\tilde{f}, u_\varepsilon)_{L^2(D)} = (f, u_\varepsilon|_\Omega)_{L^2(\Omega)} \longrightarrow (f,u)_{L^2(\Omega)}$

- $(\tilde{f}, \mathcal{O}\, u)_{L^2(D)} = (f,u)_{L^2(\Omega)}$ car $\tilde{f} = 0$ en dehors de Ω.

- $Re\ A_\varepsilon\ (\mathcal{O}\, u, \mathcal{O}\, u) = Re\ a(u,u) + \varepsilon\ \|\mathcal{O}\, u\|^2_{H^1(\Omega_2)}$

car $\mathcal{O}\, u = u$ dans Ω , 0 dans Ω_1 .

Par conséquent:

$$Re\ A_\varepsilon\ (\mathcal{O}u, \mathcal{O}u) \longrightarrow Re\ a(u,u) = Re\ (f,u) \quad \text{quand} \quad \varepsilon \to 0.$$

d'où :

$$Re\ Z_\varepsilon \longrightarrow Re\ (f,u) - 2\ Re\ (f,u) + Re\ (f,u) = 0\ .$$

• *Minorons* $Re\ Z_\varepsilon$:

$$Re\ Z_\varepsilon = Re\ a\ (u_\varepsilon|_\Omega - u, u_\varepsilon|_\Omega - u) + \|\sqrt{\varepsilon}\ (u_\varepsilon - \mathcal{O}u)\|^2_{H^1(\Omega_2)} + \left\|\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

$$Re\ Z_\varepsilon \geq \beta\ \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\sqrt{\varepsilon}\ (u_\varepsilon - \mathcal{O}u)\|^2_{H^1(\Omega_2)} + \left\|\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\right\|^2_{H^1(\Omega_1)}$$

D'où (I-53), (I-54), (I-55) puisque $Re\ Z_\varepsilon \longrightarrow 0$.

V - *GENERALISATION AUX PROBLEMES AUX LIMITES D'ORDRE 2m.*

Soit l'opérateur :

$$(I\text{-}56) \qquad A = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D_p\ (a_{pq}\ D_q) \quad \text{défini dans l'ouvert } \Omega\ .$$

où $D_p u = \dfrac{\partial^{|p|} u}{\partial x_1^{p_1} \cdots \partial x_n^{p_n}}$ avec $|p| = p_1 + \ldots + p_n$.

et $a(u,v)$ la forme sesquilinéaire associée:

$$(I\text{-}57) \qquad a(u,v) = \sum_{|p|,|q| \leq m} \int_\Omega a_{pq}\ D_p\ u \cdot D_q\ \overline{v}\ dx$$

Hypothèse R: $a_{pq} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout p,q.

Les problèmes aux limites *homogénes* associés à A s'écrivent sous forme variationnelle:

$$(I\text{-}58) \qquad \begin{cases} a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)} & \text{pour tout } v \in V \\ u \text{ cherché dans } V. \end{cases} \qquad (Q)$$

où V est un espace de Hilbert, sous espace vectoriel fermé de $H^m(\Omega)$ tel que:

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega) \quad .$$

Résultat I-10.: Si $a(u,v)$ est V- coercive le problème (Q) admet une solution unique .

Nous ne considérons ici que les deux cas limites $V = H_0^m(\Omega)$ et $V = H^m(\Omega)$ correspondants au problème de DIRICHLET et à un problème de NEUMANN.

5-1. *Problème initial formel (P)* (*voir* [13]).

Le problème variationnel (*I*-58) équivaut à:

(*I*-59) $A\,u = f$ dans $L^2(\Omega)$ ($A\,u$ calculé au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$ appartient à $L^2(\Omega)$ et égale f)

$$(I\text{-}60) \quad \int_\Omega A\,u.\,\bar{v}\,dx = a(u,v) \quad \text{pour tout} \quad u,v \in V.$$

Appliquons la formule de Green (formellement):

$$(I\text{-}61) \quad \int_\Omega A\,u.\,\bar{v}\,dx = a(u,v) + \sum_{j=0}^{m-1} \langle S_j\,u,\ \gamma_j\,\bar{v} \rangle$$

où les S_j sont des opérateurs d' ordre $2m - j - 1$ sur Γ et $\gamma_j v = \frac{\partial^j u}{\partial n_j}$ est la dérivée normale d'ordre j de v sur Γ .

avec: $\begin{cases} \gamma_j\,v \in H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \text{ et } S_j u \in H^{-m+j+\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ 0 \leq j \leq m-1 \ . \end{cases}$

. Pour $V = H_0^m(\Omega)$, la somme de droite est nulle dans (*I*-61) et (*P*) s'écrit:

$$(I\text{-}62)\quad \begin{cases} A\,u = f & \text{dans } \Omega \\ \gamma_j\, u = 0 & \text{sur } \Gamma\ ,\ 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$ (correspondant à l'appartenance de u à $H_0^m(\Omega)$).

. Pour $V = H^m(\Omega)$ (un problème de NEUMANN)

$$S_j\, u = 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant j \leqslant m-1, \quad \text{sur } \Gamma$$

et (P) s'écrit:

$$(I\text{-}63)\quad \begin{cases} A\,u = f & \text{dans } L^2(\Omega) \\ S_j\, u = 0 & 0 \leqslant j \leqslant m-1 \quad \text{sur } \Gamma\ . \end{cases}$$

5-2. *Les problèmes approchés* (Q_ε):

Nous approchons maintenant $(I\text{-}62)$ et $(I\text{-}63)$ par un problème de DIRICHLET résolu dans un domaine plus grand $D \supset \Omega$

Soit toujours Ω_1 le " domaine auxiliaire " et $D = \Omega \cup \overset{\circ}{\Gamma} \cup \Omega_1$; posons:

$$(I\text{-}64)\quad A_\varepsilon(u,v) = \sum_{|p|,|q| \leqslant m} \int_{\Omega} A_{pq}\ D_p\, u \,.\, D_q\ \bar{v}\ dx$$

Le problème approché variationnel (Q_ε) s'écrira :

$$(I\text{-}65)\quad \begin{cases} A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} & \text{pour tout } v \in H_0^m(D). \\ u_\varepsilon \text{ cherché dans } H_0^m(D). \end{cases}$$

les coefficients A_{pq} dépendant des problèmes (P) considérés.

5-3. *Problème approché correspondant au problème de DIRICHLET* $(I\text{-}62)$:

On prendra par exemple :

$$(I\text{-}66)\quad A_{pq} = \{\ a_{pq} \text{ dans } \Omega\ ,\ \frac{1}{\varepsilon}\delta_{pq} \text{ dans } \Omega_1\ \}$$

où $\delta_{pq} = \{\ 1 \text{ si } p = q,\ 0 \text{ si } p \neq q\ \}$

On démontre de manière analogue au § *III* les résultats suivants pour (Q_ε) défini par (*I*-65).(*I*-66) :

Résultat I-11.: Pour tout ε positif fixé, (Q_ε) admet une solution unique .

Théorème I-9 : quand ε tend vers 0:

(*I*-67) $\| u_\varepsilon |_\Omega - u \|_{H^m(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon}$

(*I*-68) $\| u_\varepsilon |_{\Omega_1} \|_{H^m(\Omega_1)} \leq C_1\sqrt{\varepsilon}$ où c et C_1 sont des constantes .

5-4 *Problème approché correspondant au problème de NEUMANN (I-63)* :

On choisit pour A_{pq} :

(*I*-69) $A_{pq} = \{ a_{pq}$ dans Ω , $\varepsilon\, \delta_{pq}$ dans $\Omega_1 \}$

(Q_ε) devient (*I*-65).(*I*-69). On démontre encore les résultats :

Résultat I-12 : Pour tout ε positif fixé le problème approché (Q_ε) admet une solution unique.

Théorème I-10 : quand ε tend vers 0 :

(*I*-70) $\| u_\varepsilon |_\Omega - u \|_{H^m(\Omega)} \leq c\sqrt{\varepsilon}$

(*I*-71) $\| u_\varepsilon |_{\Omega_1} \|_{H^m(\Omega_1)} \leq K$ où c et K sont des constantes.

VI. *EXEMPLES CORRESPONDANT A L'OPERATEUR BIHARMONIQUE* Δ^2 :

6-1. *Problème de DIRICHLET* :

Formellement considérons le problème aux limites suivant :

$$(I\text{-}72)\quad \begin{cases} \Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = f \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \text{ frontière de } \Omega \text{ . } f \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Posons le problème (I-72) de façon précise, sous forme variationnelle.

Soit : $H(\Delta, \Omega) = \{ u \mid u, \Delta u \in L^2(\Omega) \}$; Δu étant pris au sens des distributions . On montre que c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire :

$$(I\text{-}73)\quad ((u,v))_{H(\Delta,\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} .$$

et qu'on peut définir $u|_\Gamma$ et $\dfrac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma$ dans $H^{3/2}(\Gamma)$ et $H^{1/2}(\Gamma)$ respectivement pour tout $u \in H(\Delta, \Omega)$.

Posons, pour le moment,

$$V_0 = \{ u \mid u \in H(\Delta, \Omega) , u = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma \}$$

V_0 muni de la norme induite par (I-73) est isomorphe à $H_0^2(\Omega)$. En effet pour tout $u \in H_0^2(\Omega)$ on a :

$$|u|_{L^2(\Omega)} \leq c \, |grad u|_{L^2(\Omega)}$$

$$|grad\, u|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \, |\Delta u|_{L^2(\Omega)} \text{ . d'après l'inégalité}$$

de Friedrichs appliquée à u et $grad\, u$.

Le problème variationnel $(\mathcal{Q})$ s'écrit alors :

$$(I\text{-}74)\quad \begin{cases} \text{Déterminer } u \in V_0 \text{ tel que :} \\ (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = (f,v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in V_0 . \end{cases}$$

Résultat I-13. Le problème (I-74) admet une solution unique.

Démonstration : il suffit de vérifier les hypothèses du théorème I-2 et en particulier la coercivité :

$$(\Delta v, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = |\Delta v|^2 \geq \frac{1}{2}\left(|\Delta v|^2 + \frac{1}{cc_1}|v|^2\right)$$

$$|\Delta v|^2 \geq \inf\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2cc_1}\right)\|v\|^2_{H(\Delta,\Omega)}$$

. Construisons maintenant le problème approché (Q_ε).

Soit $A_\varepsilon = \{ 1 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \}$

$B_\varepsilon = \{ 1 \text{ dans } \Omega, \frac{1}{\varepsilon} \text{ ou } 0 \text{ dans } \Omega_1 \}$

On pose :

(I-75) $$a_\varepsilon(u,v) = \int_D (A_\varepsilon \cdot \Delta u_\varepsilon \cdot \Delta \bar{v} + B_\varepsilon u_\varepsilon \bar{v})\, dx$$

Problème (Q_ε) : Déterminer $u_\varepsilon \in V_0(D)$ tel que :

(I-76) $a_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)}$ pour tout $v \in V_0(D)$

où $V_0(D)$ désigne l'analogue de V_0 mais dans D au lieu de Ω .

On démontre de façon analogue à ce qui précède :

Résultat I-14 : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème (Q_ε) admet une solution unique.

Théorème I-11 : Quand $\varepsilon \to 0$:

(I-77)
$$\begin{cases} \|u_\varepsilon|_\Omega - u\|_{H(\Delta,\Omega)} \leq C_3 \sqrt{\varepsilon} \\ \|u_\varepsilon|_{\Omega_1}\|_{H(\Delta,\Omega_1)} \leq C_4 \sqrt{\varepsilon} \end{cases}$$

6-2- *Problème de NEUMANN* :

Considérons le problème initial (P) *(formel)* :

(I-78)
$$\begin{cases} \Delta^2 u + \lambda u = f \text{ dans } \Omega, \ \lambda > 0, \ f \in L^2(\Omega). \\ \frac{\partial(\Delta u)}{\partial n} = 0 \text{ et } \Delta u = 0 \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$

On montre que (I-78)est équivalent formellement au problème variationnel ($\mathcal{Q}$) :

$$(I\text{-}79)\quad \begin{cases} \text{Trouver } u \in H(\Delta,\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = \int_\Omega (\Delta u\, \Delta \bar{v} + \lambda\, u\, \bar{v})\, dx = \int_\Omega f \cdot \bar{v}\, dx \quad \text{pour tout} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad v \in H(\Delta,\Omega). \end{cases}$$

Résultat I-15 : Le problème (I-79) admet une solution unique.

Problème approché ($\mathcal{Q}_\varepsilon$) :

Soit : $A_\varepsilon = \{ 1 \text{ dans } \Omega,\ \varepsilon \text{ dans } \Omega_1 \}$

$B_\varepsilon = \{ 1 \text{ dans } \Omega,\ \varepsilon \text{ dans } \Omega_1 \}$

et $A_\varepsilon(u,v) = \int_D (A_\varepsilon \Delta u\ \Delta \bar{v} + \lambda\, B_\varepsilon u\, \bar{v})\, dx$

($\mathcal{Q}_\varepsilon$) s'écrit :

$$(I\text{-}80)\quad \begin{cases} \text{Déterminer } u_\varepsilon \in V_0(D) \text{ tel que :} \\ A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (\tilde{f}, v)_{L^2(D)} \quad \text{pour tout } v \in V_0(D). \end{cases}$$

On montre encore les deux résultats :

Résultat I-16 : ($\mathcal{Q}_\varepsilon$) admet une solution unique pour ε positif fixé.

Théorème I-12 : quand $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$(I\text{-}81)\quad \begin{cases} u_\varepsilon|_\Omega \longrightarrow u \text{ dans } H(\Delta,\Omega) \text{ fort.} \\ \sqrt{\varepsilon}\, u_\varepsilon|_{\Omega_1} \longrightarrow 0 \text{ dans } H(\Delta,\Omega_1) \text{ fort.} \end{cases}$$

VII. *CONCLUSION* :

On vient donc de démontrer qu'à tout problème aux limites elliptique,

homogène, posé dans un domaine Ω , on peut associer un problème de DIRICHLET à coefficients discontinus, résolu dans un domaine plus simple, et dont la solution approche celle du problème initial.

On pourrait encore généraliser cette méthode pour d'autres conditions limites (en particulier non homogènes) ainsi que pour des problèmes de transmission [9]. Une autre possibilité est donnée par la remarque qui suit.

VIII . REMARQUE SUR LA REGULARISATION DES COEFFICIENTS :

Il peut être intéressant, dans certains cas , de ne pas introduire de coefficients discontinus dans le problème approché (Ω_ε). Par exemple si a_{ij} et a_0 sont donnés de classe $C^p(\Omega)$ $(p \geq 0)$, il est possible de construire A_{ij}, A_0 appartenant à $C^p(D)$.

Les résultats de convergence sont plus faibles mais en appliquant une méthode de résolution appropriée (méthode variationnelle des différences finies [2])les résultats numériques sont bons.

Un des avantages de ce procédé est que la méthode d'extrapolation de RICHARDSON ([6] , [16]) s'applique ce qui améliore nettement les résultats.

Nous donnons dans le cas du problème de DIRICHLET pour l'opérateur self-adjoint (*I*-7) les résultats théoriques correspondants.

Reprenons le problème variationnel (Q) qui lui correspond :

$$a(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega D_j \; u \; D_i \; \overline{v} \; a_{ij} \; dx + \int_\Omega a_0 \; u.\overline{v} \; dx$$

(*I*-16) $\begin{cases} \text{Déterminer } u \in H_0^1 \; (\Omega) \text{ tel que :} \\ a(u,v) = (f,v)_{L^2(\Omega)} \quad \text{pour tout } v \in H_0^1 \; (\Omega) . \end{cases}$

Nous conservons l'hypothèse de coercivité (I-9), (I-10); (I-8) étant remplaçée par :

Hypothèse R1 : $a_{ij}, a_0 \in C^p(\Omega)$, $p \geq 0$, $f \in C^p(\Omega)$.

sous ces hypothèses (I-16) admet une solution unique.

Problème approché (Q_ε) :

En gardant les mêmes notations (Ω_1 domaine auxiliaire, D domaine complété...) nous ferons l'hypothèse suivante, vérifiée si $\Gamma = \partial\Omega$ est assez régulière.

Hypothèse R2 : il existe des fonctions A_{ij}, A_0, F de classe $C^p(D)$ prolongeant a_{ij}, a_0, f à D et vérifiant :

(I-82) $A_{ij} = a_{ij}$, $A_0 = a_0$, $F = f$ dans Ω.

(I-83) $$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\, \xi_j\, \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \alpha > 0, \text{ dans } D.$$

(I-84) $Re\, A_0(x) \geq 0$.

Hypothèse R3 : Il existe une fonction $g(x)$ définie dans $\overline{\Omega}_1$ telle que :

- $D_k\, g(x) = 0$ sur $\Gamma = \partial\Omega$ où $|k| \leq p$
- $g(x) \in C^p(\Omega_1)$
- $g(x) \geq 0$.

Le problème approché peut s'écrire :

(I-85) $$\begin{cases} A\varepsilon(u_\varepsilon, v) = (F, v)_{L^2(D)} \text{ pour tout } v \in H_0^1(D) \\ u_\varepsilon \in H_0^1(D) \ ? \end{cases}$$

avec :

(I-86) $$A_\varepsilon(u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D A_{ij}\, D_j u . D_i \bar{v}\, dx + \int_D A_0\, u\, \bar{v}\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} g(x)\, u\, \bar{v}\, dx$$

Sous les hypothèses R, $R1$, $R2$, $R3$, on a :

Résultat I-17 : Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème $(Q\varepsilon)$ admet une solution unique.

Théorème I-13 : Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$:

$$u_\varepsilon \Big|_\Omega \longrightarrow u \text{ dans } H^1(\Omega) \text{ fort.}$$

$$\sqrt{g}\,\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega_1) \text{ fort.}$$

Les démonstrations sont analogues à celles exposées précédemment. Nous ne les ferons pas.

On est donc ramené à résoudre un problème de DIRICHLET dans D à coefficients de classe $C^p(D)$. D'autres prolongements sont possibles ; par exemple :

$$A_{ij} = \{\, a_{ij} \text{ dans } \Omega\,,\ O\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right) \text{ dans } \Omega_1\,,\ A_{ij} \in C^p(D) \,\}.$$

Tout ceci s'applique aux problèmes de NEUMANN et mêlés.

CHAPITRE II

APPLICATIONS. CAS ELLIPTIQUE

I - Généralités :

Les méthodes exposées au chapitre I donnent lieu à deux sortes d'applications. La première, étudiée par SAULIEV [19], consiste à composer un "programme universel" permettant d'approcher toute une classe de problèmes elliptiques homogènes par l'un des procédés précédents. Ceci présente un intérêt spécial lorsqu'on a à résoudre des problèmes de même type un grand nombre de fois. (par exemple pour l'étude du comportement de la solution quand on déplace la frontière [21]). Dans le cas traité, SAULIEV considère la classe de tous les problèmes de Dirichlet dont la frontière est formée de segments de droites parallèles aux axes.

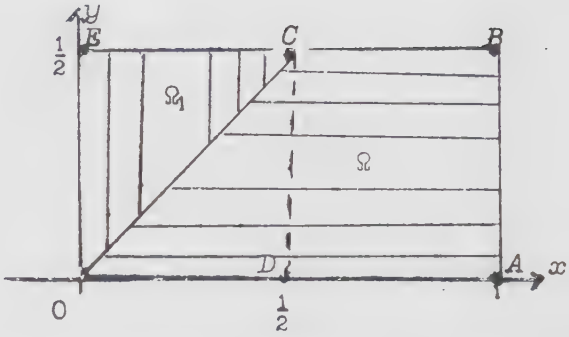
La seconde possibilité consiste à approcher un problème donné, de type elliptique et homogène, par un autre résolu dans un domaine plus simple. Ceci permet de simplifier la programmation dans certains cas et de rendre plus régulier le conditionnement des matrices.

Nous donnerons d'abord quelques exemples d'approximation de problèmes simples, en dimension deux, pour lesquels nous construirons le problème approché et comparerons les résultats numériques obtenus par résolution des problèmes initial et approché.

Puis au paragraphe VII nous décrirons brièvement le programme universel de SAULIEV [19].

II - *Approximation d'un problème de DIRICHLET dans un trapèze.*

2.1. *Problème initial*:



Soit Ω le trapèze $OABC$ et u la solution de:

$$(II\text{-}1) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

où $\Gamma = \partial\Omega = (OA) \cup (AB) \cup (BC) \cup (CO)$

Nous nous sommes donnés la solution exacte:

$$u(x,y) = y(1-x)\left(\frac{1}{2}-y\right)(x-y)$$

d'où:

$$f(x,y) = 2y\left(\frac{1}{2}-y\right) - 2(1-x)\left(3y - x - \frac{1}{2}\right) + y(1-x)\left(\frac{1}{2}-y\right)(x-y)$$

Problème variationnel (Q) *associé*:

$$(II\text{-}2) \quad \int_\Omega \operatorname{grad} u \operatorname{grad} \bar{v}\, dx + \int_\Omega u\, \bar{v}\, dx = \int_\Omega f\, \bar{v}\, dx$$

pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$; u cherché dans $H_0^1(\Omega)$.

2.2. *Le problème approché*:

Introduisons le "triangle auxiliaire" $\Omega_1 = OEC$ de façon à obtenir pour D , domaine complété, le rectangle $OABE$.
Nous avons pris le choix (I-22) des coefficients A_{ij}, A_0, ce qui donne pour (P_ε) (formel):

$$(II\text{-}3) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + u_\varepsilon + \dfrac{M u_\varepsilon}{\varepsilon} = \tilde{f} & \text{dans } D \\ u_\varepsilon|_S = 0 \quad \text{où } S = \partial D \end{cases}$$

avec: $M = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega \\ 1 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases}$ $\qquad \tilde{f} = \begin{cases} f(x,y) & \text{dans } \Omega . \\ 0 & \text{dans } \Omega_1 . \end{cases}$

Problème variationnel (Q_ε) *correspondant:*

$$(II\text{-}4) \qquad \int_D grad\, u_\varepsilon \; grad\, \bar{v}\, dx + \int_D u_\varepsilon \bar{v}\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_1} u_\varepsilon \bar{v}\, dx = \int_D \tilde{f}\, \bar{v}\, dx$$

pour tout $v \in H_0^1(D)$; u_ε cherché dans $H_0^1(D)$.

On vérifie sans difficulté les hypothèses du théorème d'existence et unicité pour (Q) et (Q_ε) ainsi que du théorème de convergence forte de u_ε vers u quand ε tend vers zéro.

Les deux problèmes (Q) et (Q_ε) ont été résolus par la méthode des différences finies en appliquant un réseau de pas $h = \frac{1}{14}$, ce qui donne des systèmes d'ordre 57 et 78 respectivement. Les formules d'approximation s'écrivent pour (P) :

$$-\frac{u(M+h_1) + u(M+h_2) + u(M-h_1) + u(M-h_2) - 4\,u(M)}{h^2} + u(M) = f(M) \qquad \text{avec} \quad M \in \Omega_h$$

et pour (Q_ε) :

$$-\frac{u_\varepsilon(M+h_1) + u_\varepsilon(M+h_2) + u_\varepsilon(M-h_1) + u_\varepsilon(M-h_2) - 4u_\varepsilon(M)}{h^2} + u_\varepsilon(M) + \frac{M(M)}{\varepsilon}\, u_\varepsilon(M) = \tilde{f}(M) \qquad \text{avec} \quad M \in D_h$$

où $h_1 = \Delta x$, $h_2 = \Delta y$, $h = h_1 = h_2$ (réseau uniforme)

et $M(M) = \{0$ dans Ω , 1 dans Ω_1 , $\frac{1}{2}$ sur $0C\}$

$\tilde{f}(M) = \{f(M)$ dans Ω , 0 dans Ω_1 , $\frac{1}{2} f(M)$ sur $0C\}$

Ω_h et D_h étant les domaines approchés.

2.3. *Résultats numériques:*

Il se trouve, après calcul, que la solution approchée par les différences finies de (Q) coïncide avec la solution exacte aux points du réseau Ω_h. Le problème approché (Q_ε) a été résolu pour deux valeurs de ε :

$$\varepsilon = 10^{-4} \quad \text{et} \quad \varepsilon = 10^{-6} .$$

On obtient :

	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
$\underset{x \in \Omega_h}{Max} \left\lvert \frac{u_\varepsilon^h - u}{u} \right\rvert$	3%	0,07%
erreur relative moyenne	0,5%	0,005%
$Max \lvert u_\varepsilon \rvert$ sur OC où $u = 0$	0,024	0,00025
$Max \lvert u_\varepsilon \rvert$ dans Ω_1	0,08	0,00009

- on constate que l'erreur relative est maximale au voisinage de la frontière commune OC entre Ω et Ω_1 , et que u_ε décroit très vite dans Ω_1 dès qu'on s'en éloigne.

- le choix $\varepsilon = 10^{-4}$ est insuffisant pour obtenir une bonne précision. Il faut prendre ε de l'ordre de h^4 pour ne pas introduire d'erreur supplémentaire lors de la résolution.

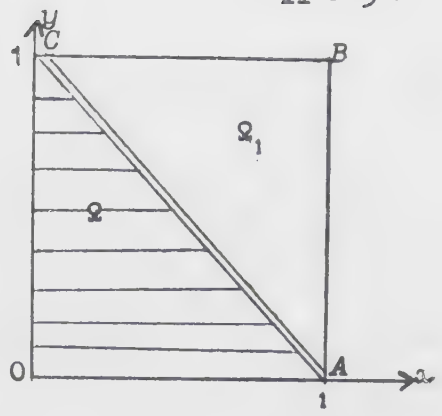
- le système associé à (Q_ε) n'a que certains coefficients diagonaux dépendant de ε (ceux correspondant à $\bar{\Omega}_1$) , tous les autres étant les mêmes dans D ce qui simplifie la programmation.

III . Approximation d'un problème de DIRICHLET dans un triangle avec coefficients régularisés et extrapolation:

3.1. *Le problème initial: (P)*

Soit Ω le triangle OAC et u solution de:

$$(II\text{-}5)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u|_{\Gamma} = 0 & \text{où } \Gamma = (OA)\cup(AC)\cup(CO) \end{cases}$$



pour lequel nous avons pris:

$$(II\text{-}6)\qquad u(x,y) = x^3y^3(1-x-y)$$

d'où:

$$f(x,y) = 6\,x\,y(x+y-(x^2+y^2)(1-x-y))$$

Problème variationnel (Q) associé:

$$(II\text{-}7)\qquad \int_\Omega grad\,u\; grad\,\bar{v}\,dx = \int_\Omega f\,\bar{v}\,dx \qquad \forall\ v \in H_0^1(\Omega)$$

u cherché dans $H_0^1(\Omega)$.

Nous avons testé pour ce problème la méthode d'extrapolation de Richardson (voir [6] pour une étude détaillée) qui fournit des améliorations de convergence très intéressantes dans ce cas. En utilisant le schéma de Neville on obtient les formules d'extrapolation suivantes sur deux, trois et quatre pas:

(*II*-8) Solution extrapolée sur h et $\frac{h}{2}$ = $(4\,u(\frac{h}{2}) - u_h)/3$

(*II*-9) Sol . extrap . sur $h, \frac{h}{2}, \frac{h}{4}$ = $(64\,u(\frac{h}{4}) - 20\,u(\frac{h}{2}) + u_h)/45$

(*II*-10) Sol . extrap . sur $h, \frac{h}{2}\ \frac{h}{4}\ \frac{h}{8}$ = $(4096\,u(\frac{h}{8}) - 1344\,u(\frac{h}{4}) + 84\,u(\frac{h}{2}) - u_h)/2835$

Nous avons pris $h = \frac{1}{4}$ et $h = \frac{1}{3}$ ce qui nécessite la résolution des systèmes correspondant à: $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ et $h = \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}$ respectivement. Nous donnerons quelques résultats numériques obtenus pour $h = \frac{1}{4}$. Des résultats analogues ont été observés pour $h = \frac{1}{3}$.

Les problèmes approchés ont été construits par la méthode variationnelle

des différences finies qui consiste à chercher u sous la forme:

$$u = \sum_{M \in \Omega_h} \xi_M \, W_M \quad \text{où} \quad W_M \text{ est la fonction caractéristique du carré } \sigma_h(M)$$

de centre M et côté h, et Ω_h est un ouvert approchant Ω tel que:

$$\sigma_h(M) \cup \sigma_h(M \pm \tfrac{h_i}{2}) \subset \Omega \quad , \; i = 1, 2 \quad [2] .$$

Le système approché devient:

$$(II\text{-}11) \qquad \sum_{p \in \Omega_h} \xi_p \, a_h(W_p, W_M) = f_h(M) \quad , \qquad M \in \Omega_h$$

avec: $a_h(u_h, v_h) = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega} \delta_i u_h \, \delta_i v_h \, dx \, dy$

$$f_h(M) = \int_{\Omega \cap \sigma_h(M)} f(x,y) \, dx \, dy \qquad \delta_i u_h(x) = \left(u_h(x + \tfrac{h_i}{2}) - u_h(x - \tfrac{h_i}{2})\right) / h_i$$

Jusqu'à $h = \frac{1}{16}$, les matrices associées ont été inversées directement (par la méthode du pivot maximum); pour $h = \frac{1}{32}$ on a construit un sous-programme de résolution de systèmes par la méthode itérative de surrelaxation, avec calcul du paramètre optimum par Gauss-Seidel [5]. La solution u_1 a été obtenue après 162 itérations avec une erreur de $0{,}6.10^{-8}$ dans $l^2(\Omega_h)$.

3.2. *Résultats numériques*:

Extrapolation sur $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ pour $x = 0{,}5 \quad y = 0{,}25 \quad u(x,y) \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. approchée	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap
$\frac{1}{4}$	0,488281	0,551714		-0,063433	
$\frac{1}{8}$	0,488281	0,499072	0,481525	-0,010791	-0,006756
1/16	0,488281	0,490704	0,488341	-0,002423	-0,000060
1/32	0,488281	0,488870	0,488280	-0,000589	0,000001

Extrapolation sur $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$. (formuleII-9)

$x = 0,125 \quad y = 0,125 \quad u \times 10^5$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,286102	-0,088171		0,374273	
1/16	0,286102	0,193573	0,287721	0,092529	-0,001619
1/32	0,286102	0,263067	0,286133	0,023035	-0,000031

$x = 0,375 \quad y = 0,125 \quad u \times 10^4$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,514984	0,476628		0,038356	
1/16	0,514984	0,504694	0,514050	0,010290	0,000934
1/32	0,514984	0,512372	0,514990	0,002612	-0,000006

$x = 0,625 \quad y = 0,25 \quad u \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,476837	0,482513		-0,005676	
1/16	0,476837	0,478049	0,476561	-0,001212	0,000276
1/32	0,476837	0,477127	0,476838	-0,000290	-0,000001

$x = 0,5 \qquad y = 0,375 \qquad u \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,823975	0,847383		-0,023408	
1/16	0,823975	0,829537	0,823589	-0,005562	0,000386
1/32	0,823975	0,825347	0,823975	-0,001372	0.

De façon plus générale pour $h = \frac{1}{16}$ et $h = \frac{1}{32}$, on a:

- $\boxed{h = \frac{1}{16}}$ (système d'ordre 56)

  erreur relative moyenne: 4%

  erreur relative maximum (au voisinage de 0): 10%

  erreur relative après extrapolation sur $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$: 0,1% en moyenne.
  (calculée aux 12 points communs). 0,6% au maximun.

- $\boxed{h = \frac{1}{32}}$ erreur relative moyenne: 0,9%

  erreur relative maxima : 3%

  après extrapolation sur $h = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ (56 points): 0,02% en moyenne
  0,2% au maximum

  après extrapolation sur $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ (12 points): 0,004% en moyenne
  0,05% au maximum

3.3. *Problème approché:*

Nous prenons comme "domaine auxiliaire" le triangle ABC ce qui nous ramène à résoudre un problème de Dirichlet dans le carré $D = (OABC)$.
Nous avons utilisé la méthode de prolongement des coefficients du § I - VII.

Problème opérationnel (P_ε) :

$$(II\text{-}12) \qquad \begin{cases} -\Delta\, u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\,\tilde{g}(x,y)\, u_\varepsilon = \tilde{f}(x,y) & \text{dans } D \\ u_\varepsilon|_S = 0 \quad \text{où} \quad S = \partial D \end{cases}$$

avec:
$$\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega \\ (1-x-y)^2 & \text{dans } \bar{\Omega}_1 \end{cases} \qquad \tilde{f} = \begin{cases} f & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases} .$$

Problème variationnel correspondant (Q_ε) :

$$(II\text{-}13) \qquad A_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \frac{1}{\varepsilon}\int_D \tilde{g}\, u_\varepsilon \bar{v}\, dx + \int_D grad\, u_\varepsilon\, grad\, \bar{v}\, dx$$

$$= \int_D \tilde{f}\, \bar{v}\, dx \qquad \forall\, v \in H_0^1(D) \;;\; u_\varepsilon \in H_0^1(D) \;?$$

D'après le choix de $\tilde{g}(x,y)$ les coefficients de $A_\varepsilon(u,v)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ dans D . On vérifie sans peine les hypothèses R , R_1 et R_2 du § I - VII ce qui nous assure de l'existence et unicité de u_ε ainsi que de la convergence faible de u_ε vers u quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

Nous avons pris comme pas du réseau $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ et résolu (Q_ε) par la méthode variationnelle des différences finies [2] (formules analogues à (II - 11)), en appliquant le schéma d'extrapolation paire sur ces 4 pas. Les systèmes correspondant auront 6, 28, 120 et 496 points respectivement.

ε a été pris égal à 10^{-5} et 10^{-8} . Nous ne donnerons les résultats que pour $\varepsilon = 10^{-8}$ car $\varepsilon = 10^{-5}$ est insuffisant pour $h = \frac{1}{32}$.

3.4. *Résultats numériques:*

$x = 0,5 \qquad y = 0,25 \qquad u \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/4	0,488281	0,551742		-0,063461	
1/8	0,488281	0,499174	0,481681	-0,010893	0,006630
1/16	0,488281	0,491393	0,489275	-0,003112	0,000994
1/32	0,488281	0,488954	0,488077	-0,000673	0,000204

$x = 0,125 \qquad y = 0,125 \qquad u \times 10^5$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,286102	-0,087583		0,373685	
1/16	0,286102	0,202386	0,299042	0,083716	-0,012940
1/32	0,286102	0,264142	0,283773	0,021960	0,002329

$x = 0,375 \qquad y = 0,125 \qquad u \times 10^4$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,514984	0,477009		0,037975	
1/16	0,514984	0,507286	0,517379	0,007698	-0,002395
1/32	0,514984	0,512688	0,514296	0,002296	0,000688

$x = 0,625 \qquad y = 0,25 \qquad u \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,476837	0,482630		-0,005793	
1/16	0,476837	0,478823	0,477554	-0,001986	-0,000717
1/32	0,476837	0,477221	0,476629	-0,000384	0,000208

$x = 0,500 \qquad y = 0,375 \qquad u \times 10^3$

h	sol. exacte	sol. appr.	sol. extrap.	erreur appr.	erreur extrap.
1/8	0,823975	0,847540		-0,023565	
1/16	0,823975	0,830658	0,825029	-0,006683	-0,001054
1/32	0,823975	0,825484	0,823675	-0,001509	0,000300

Les résultats obtenus pour $h = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ et $\varepsilon = 10^{-8}$ sont très voisins de ceux du programme direct:

$h = \frac{1}{16}$

erreur relative moyenne: 3,8%
erreur relative maxima : 8%
Max $|u_\varepsilon|$ dans Ω_1 : 10^{-9} .

$h = \frac{1}{32}$

erreur relative moyenne: 1%
erreur relative maxima : 3%
Max $|u_\varepsilon|$ dans Ω_1 : 10^{-9} .

L'extrapolation est moins bonne sur le problème approché (Q_ε) que sur le problème direct. Néanmoins pour des domaines simples elle reste très efficace; le prolongement de classe $\mathcal{C}^1(D)$ des coefficients de $A_\varepsilon(u,v)$ justifie son application sans pour cela compliquer la méthode du domaine auxiliaire. Elle nécessite un choix de ε de l'ordre de h^5.

erreur relative après extrapolation sur $h = \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$: $\begin{cases} 0{,}08\% & \text{en moyenne} \\ 0{,}5\% & \text{au maximum.} \end{cases}$

erreur relative après extrapolation sur $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$: $\begin{cases} 0{,}01\% & \text{en moyenne} \\ 0{,}08\% & \text{au maximum.} \end{cases}$

IV - *Approximation d'un problème de Dirichlet dans un cercle avec coefficients régularisés.*

4.1. *Problème initial (P)* :

Soit (C) le cercle unité et u la solution de:

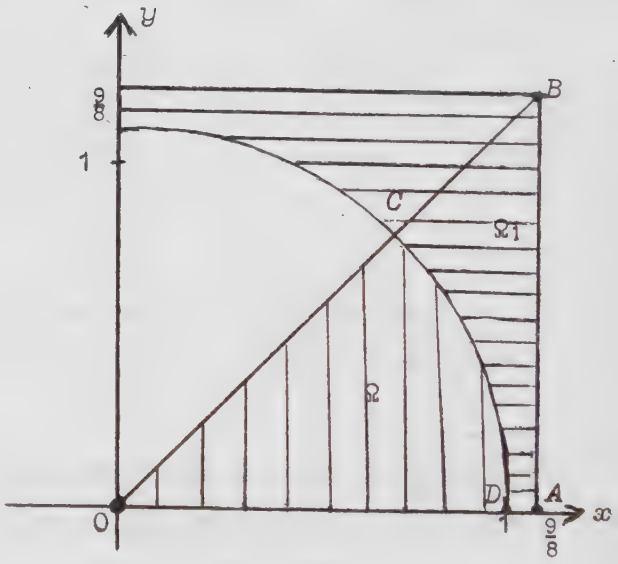
$$(II\text{-}14) \qquad \begin{cases} -\Delta u = f(x,y) & \text{dans } C \\ u|_\Gamma = 0 & \text{où } \Gamma = \partial C \end{cases}$$

où nous avons pris:

$$u(x,y) = xy\,(1 - x^2 - y^2)$$

soit:

$$f(x,y) = 12\,xy$$



En tenant compte de la symétrie de la solution par rapport à Ox et Oy, on est ramené à résoudre le problème mêlé suivant:

$$(II\text{-}15)\qquad \begin{cases} -\Delta u = f \quad \text{dans le domaine} \quad ODC = \Omega \\ u(x,0) = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ \dfrac{du}{dn}(x,x) = 0 \qquad 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{2}/2 \\ u|_\Gamma = 0 \end{cases}$$

ce qui nous permettra de choisir un pas plus fin sans compliquer le problème.

Problème variationnel (Q) associé:

$$(II\text{-}16)\qquad \int_\Omega grad u \; grad v \, dx = \int_\Omega f \, v \, dx$$

$$\forall v \in V = \{ v \mid v \in H^1(\Omega) \;,\; v = 0 \;\text{ sur }\; OD \;\text{ et }\; \widehat{DC} \}\;;\; u \in V \;?$$

On vérifie facilement l'existence et l'unicité de la solution u de (II-16).

4.2. *Résultats numériques:*

Nous avons pris comme pas $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ en approchant (II-16) par la méthode variationnelle des différences finies [2] (voir II - 11) avec pour but de comparer les solutions des problèmes directs et approchés plutôt que d'obtenir une très bonne approximation de la solution exacte. Les deux types d'extrapolation (paire et quelconque [6]) ont été appliqués sur ces trois valeurs du pas:

aux points de $h = \frac{1}{8}$:

erreur relative moyenne	erreur relative moyenne après extrapolation quelconque sur $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}$	erreur relative moyenne après extrapolation paire sur $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$
7%	1,3%	4,4%

L'extrapolation générale donne une nette amélioration des résultats.

Elle est basée sur l'existence d'un développement de la forme:

$$u_h(x) = u(x) + h\, u'(x) + \frac{h^2}{2} u''(x) + \dots \qquad x \in \Omega_h$$

qui serait difficile à justifier théoriquement mais correspond à l'ordre d'erreur au voisinage de $\Gamma = \widehat{DC}$.

4.3. *Construction du problème approché* (P_ε) :

Nous allons nous ramener à un problème mêlé plus simple à coefficients continus.

Introduisons $\Omega_1 = ABCD$ et D = triangle OAB :

$$D = \left\{ (x,y) \mid x < \frac{9}{8}\,,\ x > y > 0 \right\}$$

A partir du choix (I- 22) des coefficients de la forme approchée et régularisation nous avons:

Problème (P_ε) :

$$\text{(II-17)} \qquad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} \tilde{g}\, u_\varepsilon = \tilde{f} & \text{dans } D \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } y = 0 \text{ et } x = \frac{9}{8} \\ \frac{du_\varepsilon}{dn} = 0 & \text{sur } x = y\,. \end{cases}$$

avec: $\tilde{g}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{dans } \Omega \\ x^2 + y^2 - 1 & \text{dans } \Omega_1 \end{cases}$ $\qquad \tilde{f} = \begin{cases} f & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \Omega_1\,. \end{cases}$

Problème variationnel associé (Q_ε) :

$$\text{(II-18)} \qquad \int_D grad\, u_\varepsilon \ grad\, v\, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \tilde{g}\, u_\varepsilon\, v\, dx = \int_D \tilde{f}\, v\, dx$$

pour tout $v \in V_1 = \{ v \mid v \in H^1(D)\,,\ v = 0 \text{ sur } OA \text{ et } AB \}$, $u_\varepsilon \in V_1$?

Comme $\tilde{g}$ est nul sur $\Gamma = \widehat{DC}$, les coefficients de $A_\varepsilon(u,v)$ sont continus ce qui nous permet d'appliquer l'extrapolation. En conservant

les pas $h = \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ avec $\varepsilon = 10^{-9}$ le problème (II-18) a été approché par la méthode variationnelle des différences finies.

4.4 *Résultats numériques* :

erreur relative moyenne dans Ω	erreur relative après extrap. normale	erreur relative après extrap. paire
4,5%	2%	3,5%

L'erreur relative moyenne est donc moins grande que pour le programme direct mais l'extrapolation donne de moins bons résultats. Ceci est dû au fait qu'on ne peut avoir qu'un développement de la forme :

$$u_h(x) = u(x) + h\,u'(x) + 0(h^2).$$

Dans Ω_1 ,domaine auxiliaire :

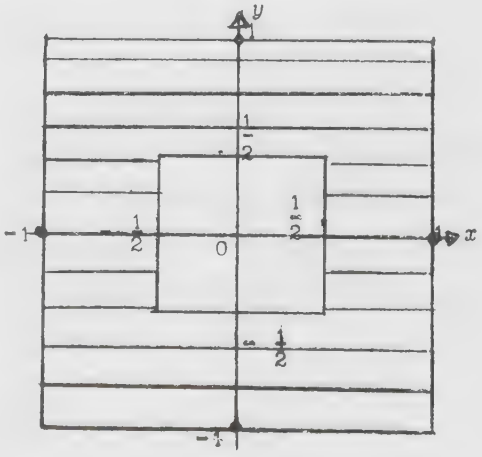
$$Max\ |u_\varepsilon| = 2.\ 10^{-7}\ .$$

Nous remarquons que seuls les coefficients diagonaux correspondant à $\Gamma \cup \Omega_1$ dépendent de ε dans la matrice, la frontière étant plus facile à approcher. La programmation en est plus simple .

V. *Approximation d'un problème mêlé*

5-1. *Problème initial* :

Nous nous proposons de résoudre l'équation de Poisson avec des conditions aux limites mixtes dans le domaine "troué" composé de deux carrès homothétiques dans le rapport $\frac{1}{2}$:



$$(II\text{-}19)\quad \begin{cases} -\Delta u = f. \\ u = 0 \text{ sur } |x| = 1,\ |y| = 1. \\ \dfrac{du}{dn} = 0 \text{ sur } |x| = \dfrac{1}{2},\ |y| = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Nous avons choisi $u(x,y)$ symétrique par rapport à $x'ox, y'oy$ et $x = y$.

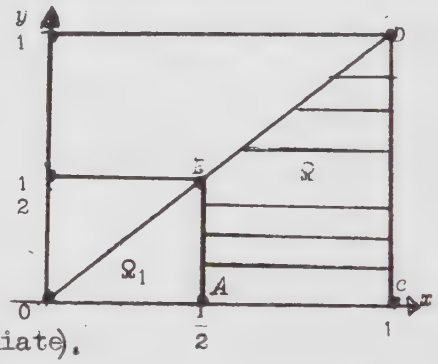
(II-20) $\quad u(x,y) = x^2\, y^2\, (1-x^2)^3\, (1-y^2)^3$

u vérifie (II-19) avec :

$$f(x,y) = -\,2(1-x^2)\,(1-y^2)\,[(1-x^2)\,(1-y^2)\,\{x^2y^2 + (1-x^2)\,(1-y^2) + 15\,x^2y^2(x^2+y^2-2)\,\} + 12\,x^2y^2\,\{x^2(1-y^2)^2 + y^2(1-x^2)^2\,\}\,].$$

Par symétrie on est amené à résoudre : (P)

(II-21)
$$\begin{cases} -\Delta u = f \text{ dans } \Omega \text{ (voir figure).} \\ u(1,y) = 0 \qquad y \in [\,0\ 1\,] \\ \dfrac{du}{dn} = 0 \text{ pour } x = y,\ \left(x = \dfrac{1}{2},\ 0 < y < \dfrac{1}{2}\right),\ \left(y = 0,\ \dfrac{1}{2} < x < 1\right) \end{cases}$$



Problème variationnel (Q)

(II-22) $\quad \displaystyle\int_\Omega \text{grad } u \cdot \text{grad } v\, dx = \int_\Omega f\, v\, dx$

pour tout $v \in V = \{\, v \mid v \in H^1(\Omega),\ v(1,y) = 0 \,\}$

u cherché dans V.

qui admet une solution unique (vérification immédiate).

5.2. *Construction du problème approché (Q_ε)*

Complétons le domaine troué donné par le carré de centre 0 et côté $\frac{1}{2}$, ce qui revient, en tenant compte de la symétrie, à introduire le "triangle auxiliaire" $\Omega_1 = 0\,A\,B$ pour (Q_ε) :

Nous donnons directement le problème approché sous sa forme variationnelle à partir du choix I-41 des coefficients A_{ij} :

(II-23) $\quad \displaystyle\int_D M_\varepsilon\, \text{grad } u_\varepsilon \cdot \text{grad } v\, dx = \int_D f\, v\, dx$

$$\forall\, v \in V_1 = \{\, v \mid v \in H^1(D),\ v(1,y) = 0 \,\},\ u_\varepsilon \in V_1\ ?$$

où :

$$M\varepsilon = \{ 1 \text{ dans } \Omega \text{ , } \varepsilon \text{ dans } \Omega_1 \}$$

$$\tilde{f} = \{ f \text{ dans } \Omega \text{ , } 0 \text{ dans } \Omega_1 \}$$

D = triangle $0\ D\ C$.

(II-23) admet une solution unique $u_\varepsilon \in V_1$ qui tend vers u quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ avec :

(II-24) $$\| u_\varepsilon |_\Omega - u \|_{H^1(\Omega)} \leq c \sqrt{\varepsilon} .$$

Les deux problèmes (Q) et (Q_ε) ont été résolus par la méthode variationnelle des différences finies [2] avec $h = \frac{1}{16}$ et $\varepsilon = 10^{-6}$, ce qui donne des systèmes linéaires d'ordre 92 et 120 respectivement .

5-3 *Résultats numériques* :

• *Problème initial* (Q) : pour $h = \frac{1}{16}$, l'erreur relative est de 1% au maximum pour $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$ et devient plus forte au voisinage de $x = 1$ où la solution est beaucoup plus petite ($u \sim 2.\ 10^{-4}$).

L'erreur dans $l^2(\Omega)$ est :

(II-25) $$\left(\frac{\sum_{M \in \Omega_h} | u_h - u |^2}{\sum_{M \in \Omega_h} | u(M) |^2} \right)^{1/2} = 0{,}998\ \%$$

• *Problème approché* (Q_ε) :

Les résultats numériques sont sensiblement les mêmes que pour (Q). Plus précisement pour $\varepsilon = 10^{-6}$:

$$\underset{M \in \Omega_h}{Max} \quad \frac{| u_h^\varepsilon - u_h |}{| u_h |} = 2.10^{-6}$$

où u_h et u_h^ε sont respectivement les solutions approchées de (Q) et (Q_ε).

La convergence de u_ε vers u est aussi bonne :

$$\left(\frac{\sum_{M \in \Omega_h} | u_h^\varepsilon - u |^2}{\sum_{M \in \Omega_h} |u(M)|^2} \right)^{1/2} = 0{,}996\ \%$$

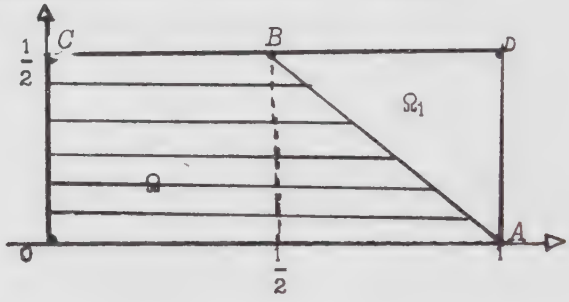
Dans ce problème tous les coefficients de la matrice dépendent de ε dans Ω_1 et on vérifie que u_ε reste bornée dans Ω_1 comme on l'a démontré au chapitre I.

VI. *Approximation d'un problème de DIRICHLET correspondant à* Δ^2 :

6-1. *Problème initial* :

Soit Ω le trapèze $O\ A\ B\ C$ et u la solution de : (P)

$$(II\text{-}26) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = f \text{ dans } \Omega \\ u|_\Gamma = \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \text{ où } \Gamma = \partial\Omega \end{cases}$$



Nous nous sommes donnés :

$$u(x,y) = x^2 y^2 (\tfrac{1}{2} - y)^2 (1-x-y)^2$$

qui vérifie $(II\text{-}26)$ avec :

$$f(x,y) = 24\, y^2 t^2 + 24\, x^2 ((y + t + z)^2 + 2(yt + yz + tz))$$

$$+ 8 [(yt + yz + tz)^2 + 2\, y\, t\, z\, (y + t + z) + 4\, x((y + t)(y\, t + y\, z + t\, z)$$

$$+ y\, t\, (y + t + z)) + x^2 ((y + t)^2 + 2\, y\, t)]$$

où on a posé : $\quad t = y - \frac{1}{2} \quad ; \quad z = x + y - 1$

Problème variationnel associé à (P) :

Trouver $u \in H_0^2(\Omega)$ tel que :

$$(II\text{-}27) \qquad \int_{\Omega} \Delta u \cdot \Delta v \, dx = \int_{\Omega} f \, v \, dx, \forall \, v \in H_0^2(\Omega)$$

On a démontré au Chapitre *I* l'existence et unicité de la solution u si $f \in L^2(\Omega)$ ce qui se vérifie facilement ici. (*II*-26) a été approché directement, par la méthode des différences finies avec un pas $h = \frac{1}{40}$.

Pour les points "intérieurs" au domaine (*i . e .* à distance > h de la frontière) l'équation générale est approchée par :

$$(II\text{-}28) \qquad \Delta_h^2 u = \frac{1}{h^4} [\, 20\, u(x,y) - 8\, u(x+h,y) - 8\, u(x-h,y) - 8\, u(x,y+h)$$

$$- 8\, u(x,y-h) + 2\, u(x+h,y+h) + 2\, u(x+h,y-h) +$$

$$2\, u(x-h,y+h) + 2\, u(x-h,y-h) + u(x+2h,y) +$$

$$u(x-2h,y) + u(x,y+2h) + u(x,y-2h) \,]$$

$$= \Delta^2 u + O(h^2)$$

Pour les points voisins de la frontière ($x = h$ ou $y = h$ par exemple) on a construit des formules d'approximation du même ordre d'erreur ($O(h^2)$) que pour les points "intérieurs" en tenant compte de $u = 0$ et $\frac{du}{dn} = 0$ sur la frontière.

On obtient ainsi un système de 570 équations linéaires que l'on a résolu par la méthode itérative de surrelaxation avec une prècision de 10^{-6} (pour la norme de $l^2(\Omega_h)$ donnée en (*II*-25)) après 800itérations . Le rayon spectral de la matrice de GAUSS-SEIDEL assoçiée est proche de 1 ($\sim 0{,}9$) ce qui explique le grand nombre d'itérations nécessaire .

6.2 *Résultats numériques* :

Si nous posons :

$$(II\text{-}29) \qquad \eta = \left(\frac{\sum_M | u_h(M) - u(M) |^2}{\sum_M | u(M) |^2} \right)^{1/2} \qquad M \in \text{réseau } \Omega_h$$

où u et u_h sont les solutions exactes et approchées de (P) .

Après 800 itérations nous avons :

$$\eta = 0,\ 0123 \ .$$

L'erreur relative est maximum au voisinage de AB (5%) et est d'environ $0,8\%$ au centre du domaine .Il est probable que pour 800 itérations le système n'est pas complètement résolu ; il conviendrait d'appliquer une méthode d'accélération de convergence .

6.3 *Le problème approché* :

Complétons Ω par le "triangle auxiliaire" $\Omega_1 = ABD$ de façon à obtenir le rectangle $O\ A\ D\ C$ pour domaine complété .

Formellement (P_ε) s'écrit :

$$(II\text{-}30) \quad \begin{cases} \Delta^2 u_\varepsilon + \dfrac{M u_\varepsilon}{\varepsilon} = \tilde{f} \text{ dans } D = (OADC) \\ u_\varepsilon\big|_S = \dfrac{du_\varepsilon}{dn}\Big|_S = 0 \text{ où } S = \partial D \end{cases}$$

avec :

$$M = \{\ 0 \text{ dans } \Omega\ ,\ 1 \text{ dans } \Omega_1\ \}$$

$$\tilde{f} = \{\ f \text{ dans } \Omega\ ,\ 0 \text{ dans } \Omega_1\ \}$$

Problème variationnel (Q_ε) :

Déterminer $u_\varepsilon \in H_0^2(D)$ tel que :

$$(II\text{-}31) \quad \int_D (\Delta u_\varepsilon \cdot \Delta v + \frac{M}{\varepsilon} u_\varepsilon v)\, dx = \int_D \tilde{f}\, v\, dx, \ \forall\, v \in H_0^2(D).$$

D'après les résultats du Chapitre I, $(II\text{-}31)$ admet une solution unique et $u_\varepsilon\big|_\Omega \longrightarrow u$ dans $H^2(\Omega)$ fort.

En conservant le même pas $h = \Delta x = \Delta y = \dfrac{1}{40}$ nous avons approché (P_ε) par la méthode des différences finies qui conduit pour les points intérieurs au domaine D, à la formule :

$$(II\text{-}32) \quad \Delta_h^2 u_\varepsilon(P) + \frac{M u_\varepsilon(P)}{\varepsilon} = \tilde{f}(P) \text{ pour } P \in \text{réseau } D_h, \text{ où } \Delta_h^2 u \text{ a été défini}$$

en $(II\text{-}28)$ et :

$$M = \{\ 0 \text{ dans } \Omega\ ,\ \frac{1}{2} \text{ sur } A\,B,\ 1 \text{ dans } \Omega_1\ \}$$

De même que pour (P) on a construit des formules d'approximation d'ordre h^2 pour les points à la distance h de la frontière .

Le système correspondant (d'ordre 741) a été résolu par la surrelaxation avec la précision de 4.10^{-6} après 700 itérations.

6.4 *Résultats numériques* :

ε a été pris égal à 10^{-5}.

L'erreur relative dans $l^2(\Omega_h)$ (formule (*II*-29)) est :

$$\eta = 0.0167$$

L'erreur relative $\left|\frac{u_h - u}{u}\right|$ est plus faible à l'intérieur de Ω_h (0,5% en moyenne) mais est plus forte au voisinage de $A\,B$ (jusqu'à 8%).Dans le domaine auxiliaire Ω_1 :

$$\underset{x \in \Omega_1}{Max} |u_\varepsilon| = 0.5\ 10^{-9}\ .$$

Nous donnons quelques valeurs obtenues pour u, u_h , u_h^ε en certains points du réseau :

x	y	sol. exacte $\times 10^5$	sol. de (P) $\times 10^5$	sol. de (P_ε) $\times 10^5$
1/2	1/40	0.795416	0.792327	0.796514
7/40	3/20	2.59861	2.57960	2.58178
19/40	1/5	9.21150	9.11342	9.20288
1/20	7/20	0.315895	0.312435	0.312719
1/40	19/40	0.0087209	0.0086719	0.0086650

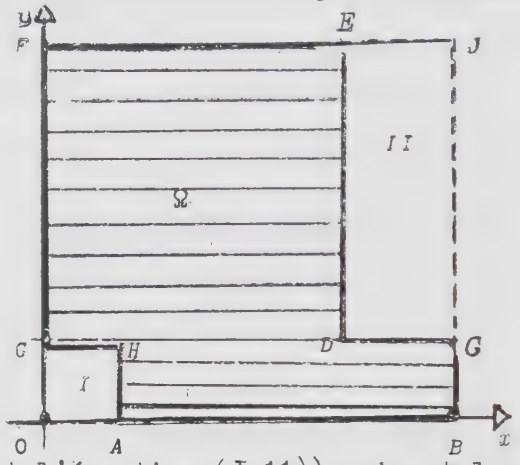
Les précisions obtenues sur u_h et u_h^ε sont sensiblement du même ordre mais la programmation de (P_ε) est un peu plus simple.

VII. Description succinte du programme universel : [19]

Considérons la classe des problèmes de DIRICHLET dont la frontière du

domaine est constituée de segments de droites parallèles aux axes de coordonnées.

On complète le domaine par des "rectangles auxiliaires" de façon à se ramener à un domaine carré ou rectangulaire. (rectangles I et II sur notre figure).



On prolonge ensuite les "frontières intérieures" (AH, CH, DC, ED) jusqu'à leur intersection avec celle du domaine complété ($0\ B\ J\ F$).

Le domaine D se présente alors comme somme de "rectangles élémentaires" ($GDEF$, $EDCJ$, ...) auxquels correspondent des valeurs Aij, Ao, $\tilde{f}$ (pour l'opérateur (I-7) et l'équation (I-11)) suivant leur appartenance au domaine initial ou auxiliaire, ainsi que des conditions de passage entre eux. Pour chacun de ces rectangles on discrétise l'opérateur (I-7) et les conditions limites de la solution.

Dans un premier temps on calcule les coefficients du système linéaire associé par cycles correspondant aux rectangles élémentaires situés sur une même ligne, tandis que les conditions limites sont approchées suivant qu'elles viennent de Ω ou du domaine auxiliaire. Dans un deuxième temps on inverse le système obtenu pour un certain choix de ε par la méthode des directions alternées.

On peut aussi bien résoudre par ce programme des problèmes elliptiques de DIRICHLET avec coefficients discontinus (bornés) et se servir de réseaux non homogènes.

Nous donnons un exemple de résolution d'un problème de DIRICHLET par ce programme. [19]

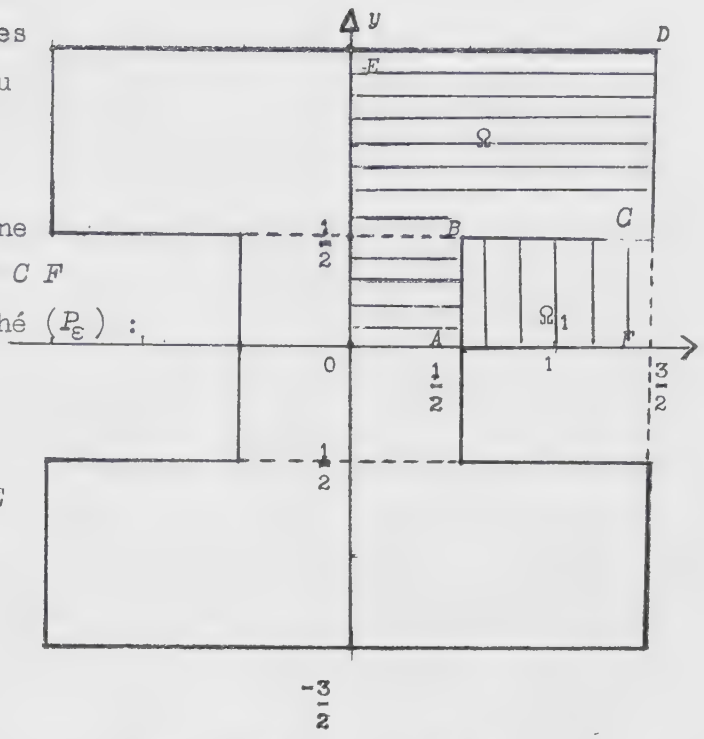
Considérons le problème de la torsion d'une poutre en T dont la section se compose de 7 carrés unitaires [3].

Le potentiel satisfait l'équation de Poisson :

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u = 2 & \text{dans } \Omega \\ u|_S = 0 & S = \partial\Omega \end{cases}$$

En tenant compte des symétries on ne considérera qu'un quart du domaine, situé dans le premier quadrant : $0\ A\ B\ C\ D\ E$.

On complète ensuite le domaine par le"rectangle auxiliaire"$A\ B\ C\ F$ et on résout le problème approché (P_ε) :



$$-\Delta u_\varepsilon = 2 \text{ dans } \Omega = 0\ A\ B\ C\ D\ E$$

$$-\Delta u_\varepsilon = 0 \text{ dans } ABCF = \Omega_1$$

$$\left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right]_{\Omega, BC} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y}\right]_{\Omega_1, BC} \quad ; \left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right]_{\Omega, AB} = \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x}\right]_{\Omega_1, AB}$$

$$[u_\varepsilon]_{\Omega, BC} = [u_\varepsilon]_{\Omega_1, BC} \quad ; [u_\varepsilon]_{\Omega, AB} = [u_\varepsilon]_{\Omega, AB}$$

$$u_\varepsilon = 0 \quad \text{sur} \quad S = (FD, ED)$$

Les crochets $[f]_{\Omega i, \Gamma}$ désignant la valeur de la fonction f prise sur Γ du côté de Ω_i.

Le problème (P) a été résolu par la méthode des différences finies pour $h = \frac{1}{4}$ et $\frac{1}{8}$, et (P_ε) pour $h = \frac{1}{4}, \varepsilon = 10^{-4}$ sur le programme universel.

Résultats numériques :

Les résultats supérieurs correspondent au problème (P) résolu directement, les résultats inférieurs à (P_ε) résolus par le programme universel pour $\varepsilon = 10^{-4}$:

0,2250	0,2192	0,2000	0,1808	0,15412	0,10391	0
0,2222	0,2157	0,1995	0,1799	0,15239	0,10264	0
0,3362	0,3195	0,2796	0,2495	0,20438	0,1356	0
0,3323	0,3163	0,2774	0,2429	0,20195	0,13319	0
0,356	0,3210	0,2321	0,1906	0,15613	0,10432	0
0,349	0,3146	0,2261	0,1871	0,15436	0,10316	0
0,321	0,251	0	0	0	0	0
0,311	0,241	0,3E-03	0,3E-03	0,2E-03	0,9E-04	0
0,297	0,223	0				
0,286	0,215	0,2E-03				
0,287	0,214	0				
0,279	0,208	0,2E-03				

L'erreur est maxima au voisinage de l'origine et est d'environ $2\,\%$ en moyenne sur l'ensemble du domaine .

De façon générale l'erreur $\left|\frac{u - u_h}{u}\right|$ est de l'ordre de 2 à $3\,\%$ sur le programme universel ce qui limite son emploi à des problèmes pour lesquels on ne désire pas une grande précision.

VIII. Quelques conclusions :

L'étude que nous venons de faire sur des exemples numériques simples nous montre qu'il peut être intéressant, dans le cas de conditions limites homogènes,

de se ramener à un domaine plus simple.Le problème approché construit par l'une des méthodes précédentes donne, pour ε de l'ordre de h^4 , une approximation de u équivalente à celle obtenue par le problème initial.La programmation en est plus simple car souvent seuls les coefficients diagonaux dépendent du paramètre ε introduit.

Cette méthode présente un intérêt particulier dans le cas de domaines troués [20], ou dans le cas où on étudie l'influence sur la solution de la position de la frontière.

Un des désavantages est d'augmenter le nombre de points intérieurs au domaine, d'où des matrices d'ordre plus élevé.

La régularisation des coefficients, si elle donne lieu à de bons résultats, nécessite des valeurs de ε plus petites ce qui peut être gênant sur machine ; par contre elle permet d'appliquer une méthode d'extrapolation sur 2 ou 3 pas qui améliore nettement les résultats.Ceci n'est pas toujours possible sur le problème direct quand la frontière n'est pas une courbe simple.

CHAPITRE III

EQUATIONS PARABOLIQUES LINEAIRES

I - *Introduction* :

Nous allons donner dans ce chapitre des procédés d'approximation des équations paraboliques linéaires dans un domaine cylindrique, et non cylindrique (frontière indépendante ou non du temps).

Dans un premier stade nous adapterons la méthode du domaine auxiliaire aux équations paraboliques dans un domaine cylindrique du type :

$$(1) \qquad \begin{cases} u'(t) + A(t)\,u(t) = f(t) \ , \ t \geq 0 \ , \ x \in \Omega \\ u(x,0) = u_0(x) \ , \ x \in \Omega \end{cases}$$

où nous supposerons que Ω est un ouvert borné de R^n, $A(t)$ un opérateur différentiel elliptique d'ordre $2m$ en x, et u vérifie des conditions aux limites homogènes de type *Dirichlet*, *Neumann* ou mêlées sur la frontière Γ de Ω. Dans chacun des cas nous construisons un "problème approché" de manière analogue au chapitre I dont la solution convergera vers celle du problème initial (1) en un certain sens.

Dans un second stade nous étudierons l'équation (1) dans un domaine non cylindrique $((x,t) \in \Omega(t) \ , \ t \geq 0)$ pour le problème de *Dirichlet* homogène.

Nous en donnerons quatre procédés d'approximation :l'un basé sur la méthode du domaine auxiliaire qui nous ramènera à un problème de même type dans un domaine cylindrique ; le second généralisant la méthode de *Galerkin* au cas non cylindrique ; le troisième obtenu en adaptant la méthode variationnelle des différences finies, décrite dans [15] pour un domaine cylindrique, au cas où le domaine dépend du temps.

Le dernier utilise la régularisation elliptique [12] qui nous ramènera à un problème aux limites de type elliptique dans le domaine

$$Q_T = \bigcup_{t \in\ ]0,T[} \Omega(t) \quad \text{de} \quad R_x^n \times R_t \ (T \text{ positif fixé}).$$

Ces quatre procédés nous fournissent en même temps qu'une approximation de la solution du problème initial, une démonstration de l'existence de cette solution pour $u_0(x) \neq 0$.

II - *Equations paraboliques dans un domaine cylindrique.*

II - 1. *Le problème initial* :

On se donne :

- V et H deux espaces de Hilbert avec $V \subset H$ algébriquement et topologiquement, V dense dans H.
- $a(t;u,v)$ une famille de formes sesquilinéaires continues sur $V \times V$, dépendant du paramètre $t, t \geq 0$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse H0 : $t \longrightarrow a(t;u,v)$ est une fonction mesurable pour tout $t \in [0T]$, $u,v \in V$, avec :
$|a(t;u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$, M indépendant de t,u,v.

Hypothèse H1 : Il existe $\lambda > 0$ et $\alpha > 0$ tels que :
$Re\ a(t;v,v) + \lambda |v|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2$, $\forall v \in V$; λ, α indépendants de $t \geq 0$.

Hypothèse H2 : Soit V' l'anti-dual de V. En identifiant H à son anti-dual nous avons : $V \subset H \subset V'$. Nous supposons :
$f \in L^2(0T; V')$ et $u_0 \in H$.

où : $L^2(0T;X) = \{ u(x,t) \mid x \longrightarrow u(x,t) \in X, t \geq 0$ et $t \longrightarrow u(t)$ appartient à L^2 de $[0T]$ à valeurs dans $X, \}$

Notations : (u,v) = produit scalaire dans H. Norme : $|u|$
$((u,v))$ = produit scalaire dans V. Norme : $\|u\|$
$\langle u,v \rangle$ = dualité entre V et V', pour $u \in V$, $v \in V'$.

Le problème initial s'écrit :

Problème (Q) : Déterminer $u \in L^2(0T;V)$ tel que :

$$(III-1) \quad \int_{\mathcal{J}0}^{T} [- (u(t) , \varphi'(t)) + a(t;u(t) , \varphi(t))] \, dt = \int_0^T \langle f(t) , \varphi(t) \rangle \, dt + (u_0 , \varphi($$

pour tout $\varphi \in \Phi = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0T;V) \; ; \; \varphi' \in L^2(0T;H) \; ; \varphi(T) = 0\}$

On démontre alors le :

Résultat III - 1 : Sous les hypothèses *H0*, *H1*, *H2* le problème (Q) admet une solution unique, et $u' \in L^2(0T;V')$. [10]

u est alors égale presque partout à une fonctiom continue de $[0T]$ à valeurs dans H, notée encore u, et $u(0) = u_0$.

La forme $v \longrightarrow a(t;u,v)$ anti-linéaire continue sur V définit un opérateur linéaire continu de V dans V' noté $A(t)$ et :

$$a(t;u,v) = \langle A(t)\, u, v \rangle \; , \quad \forall u \, , v \in V.$$

u vérifie alors :

$$(III-2) \qquad \begin{cases} u \in L^2(0T;V), u' \in L^2(0T;V') \\ u'(t) + A(t)\, u(t) = f(t) \quad \text{dans} \quad L^2(0T;V') \\ u(0) = u_0 . \end{cases}$$

Soit maintenant Ω un ouvert borné de R^n de frontière Γ assez régulière (de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux par exemple). Nous prenons :

- $H = L^2(\Omega)$
- $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, V muni de la norme de $H^1(\Omega)$, sous-espace vectoriel fermé dans $H^1(\Omega)$.

$$\cdot\quad a(t;u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x,t)\ D_j u.\ D_i \overline{v}\ dx + \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i\ D_i u.\ \overline{v}\ dx + \int_{\Omega} a_0 u\ \overline{v}\ dx$$

Hypothèses (III - 3) :

- $a_{ij}(x,t)$, $a_i(x,t)$, $a_0(x,t) \in L^{\infty}(Q_T)$ (mesurables et bornés) pour tout T fini ; où $Q_T = \Omega \times [0T]$.
- $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\ \xi_j\ \overline{\xi}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2$, $\alpha > 0$, $\forall (x,t) \in Q_T$

  pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in C^n$.
- $u_0 \in L^2(\Omega)$
- $f \in L^2(0T\ ;\ L^2(\Omega)) = L^2(Q_T)$.

Résultat III - 2. Sous les hypothèses (*III - 3*), le problème (Q) associé admet une solution unique.

Les hypothèses *H0*, *H1* et *H2* se vérifient facilement à partir de (*III - 3*).

Interprétons les problèmes résolus suivant le choix de V.

u vérifie :

- $u'(t) + A(t)\ u(t) = f(t)$ dans $L^2(0T\ ;\ H^{-1}(\Omega))$

  avec :

$$(III - 4)\quad A(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}(x,t)\ D_j) + \sum_{i=1}^{n} a_i\ D_i + a_0(x,t)$$

associé à la forme $a(t;u,v)$ donnée.

- $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega)$.
- pour - $V = H_0^1(\Omega)$: $u \in L^2(0T ; H_0^1(\Omega))$, $u' \in L^2(0T ; H^{-1}(\Omega))$

  d'où : $u(x,t) = 0$ pour $(x,t) \in \Gamma \times [0T]$ dans $L^2(0T ; H^{1/2}($

(III - 5) *Q : problème de Dirichlet*

- $V = H^1(\Omega)$: $u \in L^2(0T ; H^1(\Omega))$, $u' \in L^2(0T ; H^{-1}(\Omega))$

  u vérifie formellement :

$$\frac{du}{d\nu_{A(t)}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, D_j u \cos(\vec{n}, x_i) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma \times [0T]$$

  ($\vec{n}$: normale extérieure à Ω sur Γ.)

(III - 6) *Q : problème de Neumann*

- $V = \{v \mid v \in H^1(\Omega) , v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$

  avec $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, Γ_1 , Γ_2 de capacité positive.

  u vérifie alors : $u \in L^2(0T;V)$, $u' \in L^2(0T ; H^{-1}(\Omega))$.

  $u(x,t) = 0$ pour $(x,t) \in \Gamma_1 \times [0T]$ dans $L^2(0T ; H^{1/2}(\Gamma))$

$$\frac{du}{d\nu_{A(t)}} = 0 \quad \text{pour} \quad (x,t) \in \Gamma_2 \times [0T] \quad \text{(formel)}$$

(*III* - 7) (*Q*) : *problème MELE.*

Nous ferons toutes nos démonstrations dans le cas où $A(t)$ est l'opérateur différentiel d'ordre deux donné au dessus ; elles se généralisent facilement pour un opérateur d'ordre $2m$,
en prenant :

$$H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega) \ , \ H = L^2(\Omega)$$

$$a(t,u,v) = \sum_{|p|,|q|\leq m} \int_\Omega a_{pq} \ D_p u. \ D_q \ \bar{v} \ dx$$

soit :

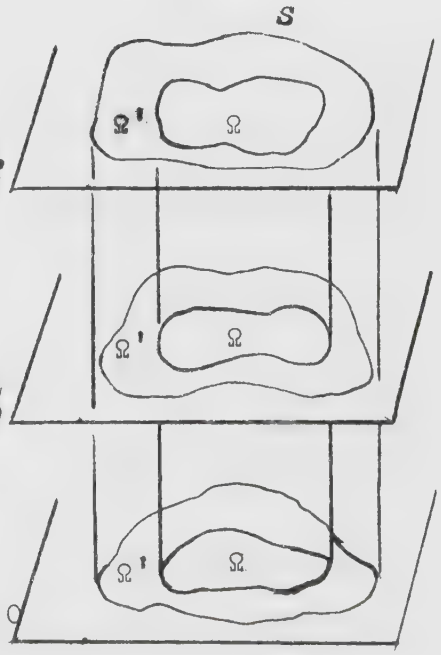
$$(III\text{-}4') \quad A(t) = \sum_{\substack{|p|\leq m \\ |q|\leq m}} (-1)^{|q|} \ D_q(a_{pq}(t) \ D_p).$$

II-2. Construction d' un problème approché :

Idées générales :

Comme au chapitre I nous considérons un ouvert $\Omega' \subset \complement \ \bar{\Omega}$, borné ou non et :

$D = \overset{0}{\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}'}$, de frontière S . On choisira le "domaine auxiliaire" Ω' de façon que D soit un domaine "simple".



Nous allons approcher les trois problèmes (*III*-5), (*III*-6) et (*III*-7) par un problème plus simple résolu dans $D \times [0T]$.

De manière générale nous construirons une forme $A_\varepsilon(t,u,v)$ ayant les propriétés suivantes :

(*III* - 8) $A_\varepsilon(t,u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $H^1(D) \times H^1(D)$

$$|A_\varepsilon(t,u,v)| \leq N\|u\|_{H^1(D)} \cdot \|v\|_{H^1(D)}$$

et $t \longrightarrow A_\varepsilon(t,u,v)$ mesurable sur $[0T]$.

(*III* - 9) Il existe $\lambda' > 0$ et $\alpha' > 0$, indépendants de $t \in [0T]$ tels que :

$$Re\ A_\varepsilon(t,v,v) + \lambda' |v|^2_{L^2(D)} \geq \alpha' \|v\|^2_{H^1(D)}, \forall v \in V(D)$$

où $V(D)$ est défini en dessous.

(*III* - 10) $A_\varepsilon(t,u,v)$ restreinte à $V \times V$ (défini au § II - 1) coïncide avec $a(t,u,v)$, au même sens qu'au chapitre I.

Problème approché (Q_ε) :

Déterminer $u_\varepsilon \in L^2(0T ; V(D))$ tel que :

(*III* - 11)

$$\int_0^T [-(C_\varepsilon u_\varepsilon(t), \varphi'(t))_{L^2(D)} + A_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t),\varphi(t))]dt = \int_0^T \langle \tilde{f}(t),\varphi(t)\rangle\, dt + (\tilde{u}_0, \varphi(0))_{L^2(D)}$$

$$\forall\, \varphi \in \Phi(D) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0T ; V(D)),\ \varphi' \in L^2(0T ; L^2(D)) ;\ \varphi(T) = 0\}$$

---

avec : $C_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^2(D) , L^2(D))$ avec $(C_\varepsilon u,u)_{L^2(D)} \geq C_1(\varepsilon)|u|^2_{L^2(D)}$

$\tilde{f} = \{f(x,t)$ dans $\Omega \times [0T]$, 0 ailleurs$\}$

$\tilde{u}_0 = \{u_0(x)$ dans Ω , 0 ailleurs$\}$

Nous avons le choix de $V(D)$ suivant que nous voulons approcher (Q) par un problème de *Dirichlet* ou de *Neumann*. Nous prendrons ici $V(D) = H_0^1(D)$; les démonstrations resteraient identiques dans les autres cas.

On a le :

Résultat III - 3. Sous les hypothèses (*III*-8)(*III*-9)(*III*-10) le problème approché (Q_ε) admet une solution unique pour $\varepsilon > 0$ et :

$$u'_\varepsilon \in L^2(0T;H^{-1}(D))$$

On en déduit que $u_\varepsilon \overset{P.P.}{=}$ une fonction continue de $[0T] \longrightarrow L^2(D)$

Nous construirons directement le problème approché (Q_ε) dans le cas où le problème initial (Q) est un problème mêlé.

Nous montrerons comment procéder pour un problème de *Dirichlet* ou de *Neumann* au § II.4.

II.3. *Approximation d'un problème mêlé* :

Rappelons le problème initial :

soit Ω ouvert borné de R^n de frontière Γ

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \ , \ \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset \ , \ \Gamma_1 \ , \Gamma_2 \text{ non vides.}$$

Posons :

$$V_0 = \{v | v \in H^1(\Omega) \ , \ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

Problème initial (Q) : Déterminer $u \in L^2(0T;V_0)$ tel que :

$$\int_0^T [-(u(t),\varphi'(t)) + a(t,u(t),\varphi(t))]\, dt = \int_0^T \langle f(t),\varphi(t)\rangle \, dt + (u_0,\varphi(0))$$

$$\forall \varphi \in \Phi_0 = \{\varphi | \varphi \in L^2(0T;V_0) \ ; \ \varphi' \in L^2(0T\times\Omega) \ ; \ \varphi(T) = 0\}$$

Construisons le problème approché (Q_ε) :

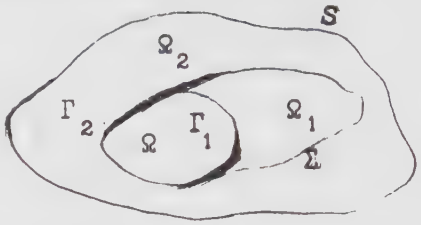
On considère d'abord un ouvert $\Omega_1 \subset \complement\ \overline{\Omega}$

tel que Ω_1 ait Γ_1 comme frontière commune avec Ω . Posons :

$\Omega^* = \Omega \cup \overset{0}{\Gamma}_1 \cup \Omega_1$,

puis Ω_2 ouvert $\subset \complement\ \overline{\Omega^*}$, on pose :

$D = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma}_1 \cup \overset{0}{\Sigma} \cup \Omega_2 \cup \overset{0}{\Gamma}_2$



où $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\partial\Omega_1 = \Gamma_1 \cup \Sigma$, $\partial\Omega_2 = \Sigma \cup \Gamma_2 \cup S$, $\partial D = S$.

Soit :

$$A_\varepsilon(t,u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D A_{ij}\, D_j u . D_i \overline{v}\, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_D A_i\, D_i u . \overline{v}\, dx + \int_D A_0 u \overline{v}\, dx$$

où A_{ij}, A_i, A_0 sont définis dans $D \times [0T]$, T fini quelconque.

Comme au chapitre I plusieurs choix de A_{ij}, A_i, A_0 sont possibles. Nous nous limiterons à celui qui donne le résultat de convergence le plus fort :

Choix de A_{ij}, A_i, A_0 :

$A_{ij} = \{a_{ij}(x,t)$ dans $\Omega \times [0T], \frac{1}{\varepsilon}\delta_{ij}$ dans $\Omega_1 \times [0T], \varepsilon\delta_{ij}$ dans $\Omega_2 \times [0T]\}$

$A_i = \{a_i(x,t)$ dans $\Omega \times [0T]$, 0 ailleurs$\}$

$A_0 = \{a_0(x,t)$ dans $\Omega \times [0T]$, $\frac{1}{\varepsilon}$ dans $\Omega_1 \times [0T]$, ε dans $\Omega_2 \times [0T]\}$

Choix de C_ε :

$$C_\varepsilon u(x,t) = \begin{cases} u(x,t) & \text{dans } \Omega^* \times [0T] \\ \varepsilon\ u(x,t) & \text{dans } \Omega_2 \times [0T]. \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, $A_\varepsilon(t,u,v)$, définie ci-dessus, vérifie les hypothèse (*III* - 8), (*III* - 9) et (*III* - 10) avec $\lambda' = \lambda$:

$$Re\ A_\varepsilon(t,v,v) + \lambda |v|^2_{L^2(D)} \geq \inf(\alpha,\varepsilon)\ \|v\|^2_{H^1(D)} .$$

et :

$$(C_\varepsilon u,u)_{L^2(D)} = |u|^2_{L^2(\partial\Omega^*)} + \varepsilon\ |u|^2_{L^2(\Omega)} \geq \inf(1,\varepsilon)\ |u|^2_{L^2(D)}$$

pour tout $u \in L^2(D)$.

On déduit du résultat *III.3.* que (Q_ε) admet une solution unique u_ε, pour tout ε positif fixé.

Dans toute la suite nous supposerons que $\lambda = 0$ dans la coercivité de $a(t,u,v)$ et $A_\varepsilon(t,u,v)$ ce qui peut se faire en changeant u et u_ε en ue^{kt}, $u_\varepsilon e^{kt}$, avec $k \geq \lambda$

Nous avons alors le :

Théorème III.1. (de convergence faible) : Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$:

(*III* - 12) $u_\varepsilon|_{\Omega\times[0T]} \longrightarrow u$ dans $L^2(0T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega))$ faible

(*III* - 13) $\dfrac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega_1\times[0T]} \longrightarrow g$ dans $L^2(0T;H^1(\Omega_1))$ faible

(*III* - 14) $\sqrt{\varepsilon}\ u_\varepsilon \longrightarrow h$ dans $L^2(0T;H^1(\Omega_2)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega_2))$ faible

où : $g \in L^2(0T;H^1(\Omega_1)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega_1))$

$h \in L^2(0T;H^1(\Omega_2)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega_2))$.

Démonstration :

u_ε vérifie dans $L^2(0T;H^{-1}(D))$:

$$(III - 15)\quad \frac{d}{dt}\,(C_\varepsilon u_\varepsilon(t)) + A_\varepsilon(t)u_\varepsilon(t) = \mathcal{F}(t)$$

les dérivées étant prises au sens des distributions avec :

$$A_\varepsilon(t) = \sum_{i,\,j=1}^{n} D_j(A_{ij}\,D_i) + \sum_{i=1}^{n} A_i\,D_i + A_0 .$$

prenant le produit scalaire de $(III - 15)$ avec u_ε il vient :

$$\int_0^s \Big\langle \frac{d}{dt}(C_\varepsilon u_\varepsilon(t)) \,,\, u_\varepsilon(t) \Big\rangle\, dt + \int_0^s A_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\, dt = \int_0^s \langle \tilde{f}(t),u_\varepsilon(t)\rangle\, dt$$

les crochets désignant la dualité entre $H^1(D)$ et $H^{-1}(D)$, $0 < s \leq T$.

Mais on voit facilement que :

$$\int_0^s \Big\{ \Big\langle \frac{d}{dt}\,(C_\varepsilon u_\varepsilon(t)) \,,\, u_\varepsilon(t) \Big\rangle + \Big\langle u_\varepsilon(t) \,,\, \frac{d}{dt}\,(C_\varepsilon u_\varepsilon(t)) \Big\rangle \Big\}\, dt =$$

$$= |u_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega^*)} + \varepsilon\,|u_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega_2)} - |u_0|^2_{L^2(\Omega)} .$$

d'où l'égalité de l'énergie pour u_ε :

$$|u_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega^*)} + \varepsilon\,|u_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega_2)} + 2\,Re \int_0^s A_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\, dt =$$

$$= 2\,Re \int_0^s \langle \tilde{f}(t),u_\varepsilon(t)\rangle\, dt + |u_0|^2_{L^2(\Omega)} .$$

D'autre part :

$$\int_0^s A_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t))\, dt = \int_0^s a(t,u_\varepsilon|_\Omega,u_\varepsilon|_\Omega)\, dt + \int_0^s \Big\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\,|_{\Omega_1} \Big\|^2_{H^1(\Omega_1)}\, dt +$$

$$+ \int_0^s \| \sqrt{\varepsilon}\, u_\varepsilon|_{\Omega_2} \|^2_{H^1(\Omega_2)}$$

En minorant $a(t,u_\varepsilon,u_\varepsilon)$ à partir de la coercivité il vient :

$$\frac{1}{2}\,|u_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega^*)} + \frac{1}{2}\,|\sqrt{\varepsilon}\,u_\varepsilon|^2_{L^2(\Omega_2)} + \alpha\int_0^s \|u_\varepsilon|_\Omega\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt + \int_0^s \Big\|\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\Big|_{\Omega_1}\Big\|^2_{H^1(\Omega_1)}\,dt +$$

$$+\int_0^s \|\sqrt{\varepsilon}\,u_\varepsilon|_{\Omega_2}\|^2_{H^1(\Omega_2)}\,dt \leq |||f|||\left(\int_0^s \|u_\varepsilon\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\,|u_0|^2_{L^2(\Omega)}$$

où $|||f|||$ = norme de f dans $L^2(0T;L^2(\Omega))$.

On en déduit que :

(1) $u_\varepsilon|_{\Omega^*\times[0T]}$ est borné dans $L^2(0T;H^1(\Omega^*)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega^*))$.

(2) $\dfrac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\,|_{\Omega_1\times[0T]}$ est borné dans $L^2(0T;H^1(\Omega_1))$.

(3) $\sqrt{\varepsilon}\,u_\varepsilon|_{\Omega_2\times[0T]}$ est borné dans $L^2(0T;H^1(\Omega_2)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega_2))$.

(4) $u_\varepsilon|_{\Omega_1\times[0T]}$ est borné dans $L^\infty(0T;L^2(\Omega_1))$.

On peut alors extraire de la suite $\varepsilon \longrightarrow 0$ une sous-suite $\varepsilon' \longrightarrow 0$ telle que dans les espaces correspondant à (1),(2),(3),(4) :

(1') $u_{\varepsilon'}|_{\Omega^*\times[0T]} \longrightarrow w$ *faiblement*

(2') $\dfrac{u_{\varepsilon'}}{\sqrt{\varepsilon'}}\,|_{\Omega_1\times[0T]} \longrightarrow g$ ""

(3') $\sqrt{\varepsilon'}u_{\varepsilon'}|_{\Omega_2\times[0T]} \longrightarrow h$ ""

(4') $u_{\varepsilon'}|_{\Omega_1\times[0T]} \longrightarrow \theta$ ""

De (1') et (2') on voit que : $w|_{\Omega_1\times[0T]} \equiv 0$. D'où $w|_{\Gamma_1} = 0$ et $w|_{\Omega\times[0T]} \in L^2(0T;V_0)$.

Il reste à montrer que $w|_{\Omega\times[0T]}$ est solution du problème initial.

Alors $w \equiv u$ dans $\Omega \times [0T]$ en vertu de l'unicité de (Q).

. $w|_{\Omega\times[0T]}$ est solution de (Q) :

Prenons dans $(III - 11)$ $\varphi \in \Phi(D)$ telle que :

$\varphi(x,t) \equiv 0$ dans $\Omega_1 \times [0T]$; il vient pour $\varepsilon = \varepsilon'$:

$$\int_0^T \{ - (u_\varepsilon|_\Omega, \varphi')_{L^2(\Omega)} - \sqrt{\varepsilon'}\,(\sqrt{\varepsilon'}u_\varepsilon|_{\Omega_2}, \varphi')_{L^2(\Omega_2)} + a(t, u_\varepsilon|_\Omega, \varphi|_\Omega) +$$

$$+ \sqrt{\varepsilon'}\,((\sqrt{\varepsilon'}u_\varepsilon|_{\Omega_2}, \varphi|_{\Omega_2}))_{H^1(\Omega_2)} \}\, dt = \int_0^T (f,\varphi)_{L^2(\Omega)}\, dt + (u_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)}$$

Faisons tendre ε' vers 0. D'après (1')et (3') il reste à la limite :

$$(5) \quad \int_0^T \{ - (w,\varphi')_{L^2(\Omega)} + a(t, w|_\Omega, \varphi(t))\}\, dt = \int_0^T (f,\varphi)_{L^2(\Omega)}\, dt + (u_0, \varphi(0))$$

$\forall \varphi \in \Phi(D), \varphi \equiv 0$ dans $\Omega_1 \times [0T]$.

Soit $\begin{cases} \Psi \in \Phi_0 \ \left(\text{voir } (Q)''\right) \text{telle que :} \\ \Psi \equiv 0 \ \text{ dans un voisinage de } \Gamma_1 \times [0T] \end{cases}$

Il existe alors $\varphi \in \Phi(D)$, nulle dans $\Omega_1 \times [0T]$ telle que :

$$\varphi \equiv \Psi \ \text{ sur } \Omega \times [0T]$$

(5) est alors valable pour un tel Ψ et comme la classe des fonctions Ψ est dense dans Φ_0 il en résulte que (5) est valable $\forall \varphi \in \Phi_0$, c'est-à-dire

que $w|_{\Omega\times[0T]}$ est solution de $(\mathcal{Q})$.

A partir du théorème *III* - 1 nous allons démontrer le :

Théorème III.2. de convergence forte : Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$,

(*III* - 16) $u_\varepsilon|_{\Omega\times[0T]} \longrightarrow u$ dans $L^2(0T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega))$ fort.

(*III* - 17) $\frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{\Omega\times[0T]} \longrightarrow 0$ dans $L^2(0T;H^1(\Omega_1))$ fort.

(*III* - 18) $\sqrt{\varepsilon}u_\varepsilon|_{\Omega_2\times[0T]} \longrightarrow 0$ dans $L^2(0T;H^1(\Omega_2)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega_2))$ fort.

Démonstration :

La solution u du problème initial vérifie :

$u \in L^2(0T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega))$, $u = 0$ sur Γ_1.

Posons :

$$\Pi_1 u = \begin{cases} u & \text{dans } \Omega \times [0T] \\ 0 & \text{dans } \Omega_1 \times [0T] \end{cases}$$

On a : $\Pi_1 u \in L^2(0T;H^1(\Omega^*)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega^*))$

où $\Omega^* = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma}_1$. D'autre part il existe un opérateur P de 1. prolongement (*cf.* chapitre I) de $H^1(\Omega^*)$ dans $H^1(R^n)$ linéaire et continu ; d'où :

$$P(\Pi_1 u) \in L^2(0T;H^1(R^n)) \cap L^\infty(0T;L^2(R^n)).$$

Soit : $\theta(x)$ $\begin{cases} = 1 & \text{sur } \Omega \quad , \theta(x) \in \mathcal{C}^1(R^n), \text{ bornée.} \\ = 0 & \text{sur } S = \partial D \end{cases}$

Alors : $\Pi u = \theta . P(\Pi_1 u) \in L^2(0T;H_0^1(D)) \cap L^\infty(0T;L^2(D))$.

et $\Pi u \equiv u$ sur $\Omega \times [0T]$, $\Pi u \equiv 0$ sur $\Omega_1 \times [0T]$.

$$\|\Pi u\|_{L^2(0T;H_0^1(D))} \leq C \|u\|_{L^2(0T;H^1(\Omega))}$$

Considérons X_ε :

$$X_\varepsilon = \frac{1}{2} |u_\varepsilon(s) - \Pi u(s)|^2_{L^2(\Omega^*)} + \frac{1}{2} | \sqrt{\varepsilon}(u_\varepsilon(s) - \Pi u(s))|^2_{L^2(\Omega_2)}$$

$$+ Re \int_0^s A_\varepsilon(t,(u_\varepsilon - \Pi u)(t), (u_\varepsilon - \Pi u)(t)) \, dt$$

En développant il vient :

$$X_\varepsilon = \left[\frac{1}{2} |u_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega^*)} + \frac{1}{2} |\sqrt{\varepsilon}\, u_\varepsilon(s)|^2_{L^2(\Omega_2)} + Re \int_0^s A_\varepsilon(t,u_\varepsilon(t),u_\varepsilon(t)) \, dt \right]$$

$$+ \left[\frac{1}{2} |u(s)|^2_{L^2(\Omega)} + Re \int_0^s a(t,u(t),u(t)) \, dt \right] + \frac{1}{2} \varepsilon \|\Pi u\|^2_{L^2(\Omega_2)}$$

$$- 2\, Re \left[\frac{1}{2} (u_\varepsilon(s),u(s))_{L^2(\Omega)} + \int_0^s a(t,u_\varepsilon(t),u(t)) \, dt \right]$$

$$- Re \left[\sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}\, u_\varepsilon, \Pi u)_{L^2(\Omega_2)} + 2 \int_0^s \sqrt{\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}\, u_\varepsilon, \Pi u)_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega_2)} \, dt \right].$$

En appliquant les égalités de l'énergie à u_ε et u, on a :

$$X_\varepsilon = \left[\frac{1}{2} |u_0|^2_{L^2(\Omega)} + Re \int_0^s (f,u_\varepsilon)_{L^2(\Omega)} \, dt \right] + \left[\frac{1}{2} |u_0|^2 + Re \int_0^s (f,u) \, dt \right]$$

$$+ \ldots$$

Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, d'après le théorème *III*.1. , il vient :

$$X_\varepsilon \longrightarrow |u_0|^2 + 2\,Re \int_0^s (f,u)\,dt - 2\left[\frac{1}{2}\,|u(s)|^2_{L^2(\Omega)} + Re \int_0^s a(t,u,u)\,dt\right]$$

Soit $X_\varepsilon \longrightarrow 0$ d'après l'égalité de l'énergie appliquée à u.

D'autre part :

$$X_\varepsilon \geq \frac{1}{2}\,|(u_\varepsilon - \Pi u)(s)|^2_{L^2(\Omega^*)} + \frac{1}{2}\,|\sqrt{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Pi u)(s)|^2_{L^2(\Omega_2)}$$

$$+ \alpha \int_0^s \|u_\varepsilon - u\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt + \int_0^s \left\| \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} \right\|^2_{H^1(\Omega_1)} dt + \int_0^s \|\sqrt{\varepsilon}(u_\varepsilon - \Pi u)\|^2_{H^1(\Omega_2)}\,dt$$

d'où (*III* - 16),(*III* - 17),(*III* - 18) quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

On a ainsi ramené la résolution d'un problème mêlé à celle d'un problème de *Dirichlet* à coefficients discontinus dans un domaine plus simple.

II.4. *Approximations d'un problème de Dirichlet ou de Neumann du second ordre* :

On est dans le cas où : $\Gamma_2 = \emptyset$ (problème de *Dirichlet*)

$\Gamma_1 = \emptyset$ (problème de *Neumann*)

La construction du domaine auxiliaire est semblable à celle faite au chapitre I. dans le cas stationnaire. Pour obtenir les résultats de convergence correspondants il suffit de poser formellement dans les théorèmes *III* -1 et *III* - 2 :

$$\begin{cases} \Omega_2 = \Phi \ , \quad D = \Omega \cup \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma} & \text{pour } \textit{Dirichlet}. \\ \Omega_1 = \Phi \ , \quad D = \Omega \cup \Omega_2 \cup \overset{0}{\Gamma} & \text{pour } \textit{Neumann}. \end{cases}$$

Les démonstrations directes sont en tous points semblables à celle du § *II.3.*

D'autres choix de A_{ij}, A_i, A_0 sont possibles, comme au chapitre I; le plus simple pour lequel la convergence forte de $u_\varepsilon|_{\Omega\times[0T]}$ vers u est assurée dans $L^2(0T;H^1(\Omega)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega))$ étant au § *II.3.*

$$A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega \times [0T] \ , \ \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \times [0T] \ , \ \delta_{ij} \text{ dans } \Omega_2 \times [0T]\}$$
$$A_i = \{a_i \text{ dans } \Omega \times [0T] \ , \ 0 \text{ ailleurs}\}$$
$$A_0 = \{a_0 \text{ dans } \Omega \times [0T] \ , \ \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \times [0T] \ , \ \varepsilon \text{ dans } \Omega_2 \times [0T]\}.$$

II.5. <u>*Généralisation à un opérateur $A(t)$ d'ordre $2m$*</u> :

De même qu'aux § *II.3.* et *II.4.* on peut construire un problème approché (Q_ε) correspondant à l'opérateur(*III* - 4') avec $H_0^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega)$. On définit pour cela un opérateur $A_\varepsilon(t)$ prolongeant $A(t)$ à $D \times [0T]$ et la forme $A_\varepsilon(t,u,v)$ qui lui est associée, et on se ramène à la résolution d'un problème de *Dirichlet* dans $D \times [0T]$. On montre encore la convergence forte de $u_\varepsilon|_{\Omega\times[0T]}$ vers u dans $L^2(0T;H^m(\Omega)) \cap L^\infty(0T;L^2(\Omega))$ pour le même choix de C_ε qu'au § *II.3.* et des A_{pq} donné au chapitre *I.§ V.*

II.6. <u>*Remarque sur la régularisation des coefficients*</u> :

Dans les paragraphes précédents nous avons introduit des coefficients discontinus A_{ij}, A_i, A_0. Si les coefficients donnés a_{ij}, a_i, a_0

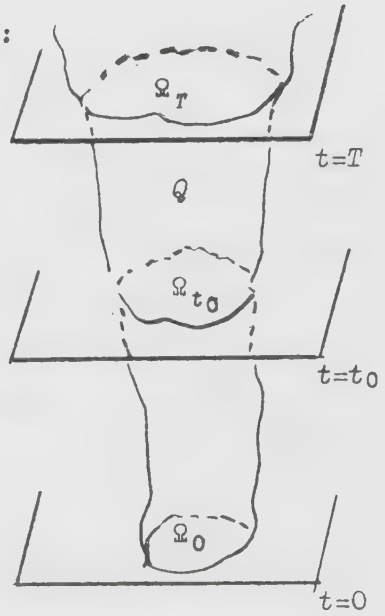
(ou a_{pq} pour l'ordre $2m$) sont de classe $\mathcal{C}^p(\overline{\Omega})$ on peut aussi bien construire des coefficients prolongés dans $D \times [0T]$ aussi réguliers tels que par exemple, pour l'ordre 2 ($m=1$) :

$A_{ij} = 0(\frac{1}{\varepsilon})$ dans $\Omega_1 \times [0T]$, $A_{ij} = 0(\varepsilon)$ dans $\Omega_2 \times [0T]$ et de même pour A_i, A_0, avec $A_{ij}, A_i, A_0 \in \mathcal{C}^p(\overline{D})$.

III - *Equations paraboliques linéaires dans un domaine non cylindrique.*

III - 1. *Enoncé du problème*

III –1 –1. *Le problème initial formel et notations* :



Soit Q un ouvert de $R^n_x \times R_t$, contenu dans $t \geq 0$. Nous posons :

- $\Omega_{t_0} = Q \cap \{t=t_0\}$, $\forall\, t_0 \geq 0$.

  (on suppose Ω_{t_0} de mesure nulle dans $R^n_x \times R_t$.)

- $Q_T = Q \cap \{0 \leq t \leq T\}$

- $\Gamma = \partial Q$ = frontière de Q

- $\Gamma' = \Gamma - \Omega_0$ = "frontière latérale" de Q.

- $\gamma_t = \partial \Omega_t$: frontière de Ω_t dans R^n_x. $(t \geq 0)$

- $\Gamma'_T = \Gamma' \cap \{0 < t < T\} = \bigcup_{t \in]0,T[} \gamma_t$.

Nous supposons Q assez régulier (voir [11]).

Considérons l'opérateur $A(t)$ d'ordre $2m$:

$$(III-19) \qquad A(t) = \sum_{\substack{|p|\leq m \\ |q|\leq m}} (-1)^{|p|} D_p(a_{pq}(x,t)\, D_q)$$

où $a_{pq}(x,t)$ est défini pour $(x,t) \in Q$, $|p|, |q| \leq m$.

Le problème de Dirichlet s'écrit formellement :

Problème P : Déterminer u "assez régulière" telle que :

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t)\, u(t) = f(t) \quad \text{dans} \quad Q$$

$$\gamma_j\, u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma', \quad t > 0, \quad j = 0,\ldots,m-1$$

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{pour} \quad x \in \Omega_0.$$

---

où $f(x,t)$ est une fonction définie sur Q, donnée

et : $\gamma_j\, u = \dfrac{d^j u}{dn_j}$ est la trace d'ordre j de u sur Γ'.

III -1 -2. Espaces fonctionnels et résultats :

Nous définissons :

- $H^{m,0}(Q) = \{u | D_p\, u \in L^2(Q) \quad \text{pour} \quad |p| \leq m\}$

les dérivées étant prises au sens des distributions à support dans Q .
C'est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\|u\|_{H^{m,0}(Q)} = \left(\sum_{|p|\leq m} \int_Q |D_p\ u|^2\ dx\ dt \right)^{1/2} .$$

- $H_0^{m,0}(Q)$: adhérence de $\mathcal{D}(Q)$ (fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans Q) , dans $H^{m,0}(Q)$ pour la norme ci-dessus.

  Notation : $F(Q) = H_0^{m,0}(Q)$.

- $F'(Q)$: anti-dual topologique de $F(Q)$.

- $\mathcal{A}(Q) = \{u | u \in H^{m,0}(Q)\ ,\ u' \in F'(Q)\}$

- $\mathcal{B}(Q) = \{u | u \in F(Q)\ ,\ u' \in F'(Q)\}$

  $\mathcal{A}(Q)$ et $\mathcal{B}(Q)$ sont munis de leur topologie naturelle d'espaces de Hilbert.

- $B_0(Q)$ (resp. $B_T(Q)$) = adhérence dans $\mathcal{B}(Q)$ des fonctions identiquement nulles au voisinage de $t = 0$ (resp. $t = T$) .

Remarque III – 1. Pour Q assez régulier [11] .

$$H^{m,0}(Q_T) = L^2(0T; H_x^m(\Omega_t))$$

où :

$L^2(0T; H_x^m(\Omega_t)) = \{u |\ x \longrightarrow u(x,t) = u_t(x) \in H_x^m(\Omega_t)\ ,\ t \in [0T]$ p.p.
et $t \longrightarrow u_t(x) \in L^2$ de $[0T]$ à valeurs dans $H_x^m(\Omega_t)$.$\}$

et :

$$\|u\|^2_{H^{m,0}(Q_T)} = \int_0^T \|u_t\|^2_{H^m_x(\Omega_t)} \, dt \ .$$

Il en sera de même pour $H_0^{m,0}(Q_T)$.

Rappelons certains résultats dont nous avons besoin pour la suite; voir [11] pour leurs démonstrations.

Résultat III. 4. : Pour $u \in H^{m,0}(Q)$ on peut définir $\gamma(D_x^p u)$, trace sur Γ' de $D_x^p u$, dans $L^2(\Gamma')$ pour $|p| \leq m - 1$, et une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in H_0^{m,0}(Q)$ est que :

$$\gamma(D_x^p u) = 0 \ , \ |p| \leq m - 1 \ .$$

Résultat III. 5. : Pour (Q) assez régulier, il existe une application linéaire continue $u \longrightarrow u(.,s)$ de $\mathcal{B}(Q)$ dans $L^2(\Omega_s)$ telle que :

$$u(.,s) = u|_{\Omega_s}$$

(trace de u sur Ω_s) quelle que soit u continue dans $\overline{Q}$ et une condition nécessaire et suffisante pour que u appartenant à $\mathcal{B}(Q_T)$ soit dans $B_T(Q_T)$ est que $u(.,T) = 0$.

On a un résultat analogue pour $B_0(Q_T)$.

Notation : $\langle u,v \rangle$, $u \in F(Q_T)$, $v \in F'(Q_T)$ désigne la dualité entre F et F' .

III -1 -3. *Le problème variationnel associé* :

Posons pour $u,\ v \in H^{m,0}(Q_T)$, T fini positif :

$$a(t,\ u,\ v) = \int_{\Omega_t} \sum_{\substack{|p|\leq m \\ |q|\leq m}} a_{pq}\ D_p u.\ \overline{D_q v}\ dx$$

définie presque partout pour $t \in [0T]$.

$$a_T(u,\ v) = \int_0^T a(t,\ u,\ v)\ dt = \int_{Q_T} \sum a_{pq}\ D_p u.\ \overline{D_q v}\ dx\ dt$$

Hypothèses :

H1 : $a_{pq}(x,t) \in L^\infty(Q_T)$, $|p|$, $|q| \leq m$, $\forall\ T$ fini.

H2 : $f \in F'(Q_T)$, $\forall\ T$ fini.

H3 —coercivité — pour tout T fini, il existe $\lambda(T) \geq 0$ et $\alpha(T) > 0$ tels que :

$$a_T(u,u) + \lambda(T)\,|u|^2_{L^2(Q_T)} \geq \alpha(T)\ \|u\|^2_{F(Q_T)}$$

$$\forall\ u \in F(Q_T)\ .$$

Nous ferons la réduction $\lambda(T) = 0$.

H4 : $u_0 \in L^2(\Omega_0)$.

H5 : Q assez régulier (de classe $\mathcal{C}^m$ par morceaux, par exemple).

Nous énonçons le problème variationnel qui est bien défini sous les hypothèses précédentes et les résultats énoncés.

Problème V : Déterminer $u \in \mathcal{B}(Q_T)$ telle que :

$$(III-20) \quad a(u,\varphi) - \langle u, D_t\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle + (u_0, \varphi(.,0))_{L^2(\Omega_0)}$$

pour tout $\varphi \in B_T(Q_T)$.

Théorème III. 3. Sous les hypothèses $H1,\ldots,H5$ le problème V admet une solution et une seule.

Il convient pour la démonstration de distinguer deux cas :

1) $u_0 \equiv 0$ dans Ω_0 . le théorème est alors démontré directement dans [11] .

2) $u_0 \not\equiv 0$ dans Ω_0 . Nous démontrerons d'abord l'unicité. L'existence de u nous sera fournie par les quatre procédés d'approximation développés plus loin.

Unicité de la solution de V :

Soient u_1, u_2 deux solutions de V et :

$$w(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$$

Pour $t = 0$ dans $L^2(\Omega_0)$:

$$w(.,0) = u_1(.,0) - u_2(.,0) \equiv 0 \ .$$

Comme $w \in \mathcal{B}(Q_T)$ on déduit du *Résultat III. 5.* que $w \in B_0(Q_T)$.

w vérifie alors :

$$a_T(w,\varphi) - \langle w, D_t \varphi \rangle = 0 \ , \forall\ \varphi \in B_T(Q_T) \ , \ w \in B_0(Q_T) \ .$$

Prenons $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T) \subset B_T(Q_T)$; il vient :

$$D_t w + A\, w = 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T) \tag{III - 21}$$

où A est défini en $(III - 19)$.

Pour $w \in F(Q_T)$, $A\, w \in F'(Q_T)$ de sorte que $(III - 21)$ est vraie dans $F'(Q_T)$ par densité.

Prenons le produit scalaire de $(III - 21)$ avec w :

$$\langle Aw, w \rangle + \langle D_t w, w \rangle = 0$$

mais pour tout $v \in F(Q_T)$:

$$\langle Aw, v \rangle = a_T(w,v) \ , \text{ soit :}$$

$$2\ Re\ a_T(w,w) + \langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle = 0 \ .$$

Or $\langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle \geq 0$ pour $w \in B_0(Q_T)$ (*cf.* [11]) et :

$2\ Re\ a_T(w,w) \leq 0$ et $w \equiv 0$ dans Q_T , ce qui démontre l'unicité.

III – 2. Problème approché par la méthode du domaine auxiliaire :

Nous allons définir dans ce paragraphe une famille de problèmes approchés V_ε , problèmes paraboliques linéaires dans un domaine cylindrique, dont la

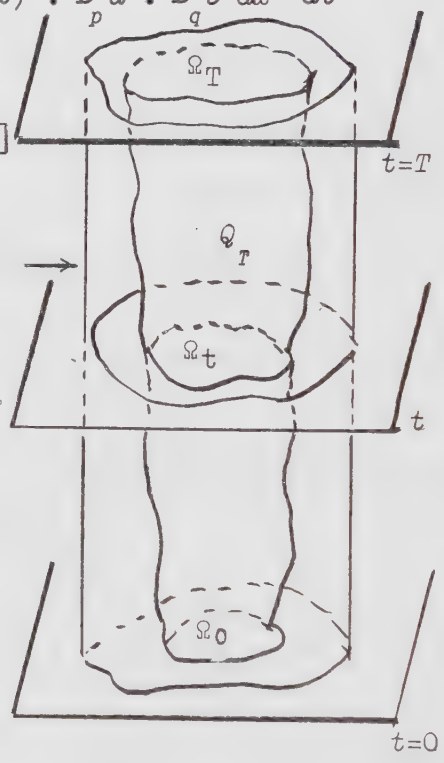
solution u_ε restreinte à Q_T convergera vers une solution u de V quand ε tend vers 0.

Considérons pour T fixé un ouvert ω de R^n tel que : $\omega \supset \Omega_t$ pour $t \in [0T]$. Alors $\omega \times [0T]$ est un ouvert cylindrique contenant Q_T.

Nous posons pour $u, v \in L^2(0T;H^1(\omega))$:

$$A_\varepsilon(u,v) = \sum_{\substack{|p|\leq m \\ |q|\leq m}} \int_{\omega\times[0T]} A_{pq}(x,t) \cdot D_p u \cdot D_q \bar{v}\, dx\, dt$$

où les $A_{pq}(x,t)$ sont définis sur $\omega \times [0T]$



Soit :

$\tilde{f}(x,t) = \{f(x,t)$ dans Q_T, 0 en dehors$\}$.

$\tilde{u}_0(x) = \{u_0(x)$ dans Ω_0, 0 en dehors$\}$.

Alors :

$\tilde{f}(x,t) \in L^2(0T;H^{-m}(\omega))$

$\tilde{u}_0(x) \in L^2(\omega)$.

Définissons le :

Problème approché V_ε : Déterminer $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega\times[0T])$ telle que :

$$A_\varepsilon(u_\varepsilon,\varphi) - \langle u_\varepsilon, \varphi' \rangle = \langle \tilde{f}, \varphi \rangle + (\tilde{u}_0, \varphi(0))_{L^2(\omega)}$$

pour tout $\varphi \in B_T(\omega\times[0T])$.

Soit A_ε l'opérateur d'ordre $2m$ associé à $A_\varepsilon(u,v)$:

$$A_\varepsilon = \sum_{\substack{|p|\leq m \\ |q|\leq m}} (-1)^{|p|} D_p(A_{pq}(x,t)\ D_q)$$

On vérifie facilement que le problème V_ε est équivalent au :

Problème V_ε^1 : Déterminer $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega\times[0T])$ telle que :

(*III* – 22)
$$D_t\ u_\varepsilon + A_\varepsilon\ u_\varepsilon = \tilde{f} \quad \text{dans} \quad F'(\omega\times[0T])$$

$$u(.,0) = \tilde{u}_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\omega)\ .$$

Rappelons le résultat suivant démontré dans [11] .

Résultat III. 6. : Si $b(u,v)$ est une forme sesquilinéaire continue sur $F(\omega\times[0T]) \times F(\omega\times[0T])$, coercive, et $g \in F'(\omega\times[0T])$, $v_0 \in L^2(\omega)$, il existe une solution et une seule de :

$$D_t\ v + B\ v = g \quad \text{dans} \quad F'(\omega\times[0T])$$

$$v(.,0) = v_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\omega) \quad \text{où} \quad v \in \mathcal{B}(\omega\times[0T])$$

où B est l'opérateur associé à $b(u,v)$ par :

$$\langle Bu,v\rangle = b(u,v) \quad \forall\ u,v \in F(\omega\times[0T])$$

les crochets désignant la dualité entre F et F' .

Nous donnons maintenant un choix des A_{pq} , le plus simple possible pour les applications, pour lequel nous démontrerons l'existence et l'unicité de $u_\varepsilon (\varepsilon > 0)$, et la convergence de $u_\varepsilon|_{Q_T}$ vers "une" solution de V .

Choix des A_{pq} :

$$A_{pq}(x,t) = \begin{cases} a_{pq}(x,t) \quad \text{dans} \quad Q_T \ , \ |p|, \ |q| \leq m \ . \\ \delta_{pq} \quad \text{dans} \quad Q'_T = \omega \times [0T] - \overline{Q}_T \ . \\ \qquad \text{si} \quad |p| + |q| > 0 \ . \\ \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{dans} \quad Q'_T \quad \text{si} \quad |p| = |q| = 0 \end{cases}$$

où : $\delta_{pq} = \{1 \ \text{si} \ p = q \ ; \ 0 \ \text{si} \ p \neq q\}$

De l'hypothèse $H1$ on déduit alors : $A_{pq} \in L^\infty(\omega\times[0T])$ et de $H3$ avec $\lambda(T) = 0$:

$$\forall \ v \in F(\omega\times[0T])$$

$$Re \ A_\varepsilon(v,v) = Re \ a_T(v|_{Q_T}, v|_{Q_T}) + \sum_{\substack{|p|\leq m \\ |p|>0}} \int_{Q'_T} |D_p v|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{\varepsilon} \int_{Q'_T} |v|^2 \, dx \, dt \ .$$

D'où pour $\varepsilon > 0$:

$$Re \ A_\varepsilon(v,v) \geq \alpha(T) \ \|v\|^2_{F(Q_T)} + inf \ (1, \tfrac{1}{\varepsilon}) \ \|v\|^2_{F(Q'_T)}$$

$$Re \ A_\varepsilon(v,v) \geq inf \ (\alpha(T), 1, \tfrac{1}{\varepsilon}) \ \|v\|^2_{F(\omega\times[0T])}$$

Du *Résultat III. 6.* nous déduisons alors le :

Résultat III. 7. :Pour $\varepsilon > 0$ fixé le problème approché V_ε^1 (ou V_ε) admet une solution unique.

Montrons maintenant le :

Théorème III. 4. (de convergence faible) :

Quand $\varepsilon \longrightarrow 0$, la restriction de u_ε à Q_T converge faiblement dans $\mathcal{H}(Q_T)$ vers "une" solution du problème initial V .

On montre ainsi l'existence d'une solution de V d'où le théorème *III. 3.*

Démonstration.

Prenons le produit scalaire (entre $F(\omega\times[0T])$ et $F'(\omega\times[0T])$) de (*III* –22) avec u_ε ; il vient :

$$\langle D_t u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \langle A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle$$

Mais :

$$\langle A_\varepsilon u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon)$$

et en prenant 2 fois la partie réelle :

$$2\,Re\, A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \langle D_t u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\varepsilon, D_t u_\varepsilon \rangle = 2\,Re \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle$$

D'après [11] (proposition 3 – 2), pour $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega\times[0T])$:

$$\langle D_t u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle + \langle u_\varepsilon, D_t u_\varepsilon \rangle = |u_\varepsilon(.,T)|^2_{L^2(\omega)} - |u_\varepsilon(.,0)|^2_{L^2(\omega)}$$

d'où :

$$2\,Re\, A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + |u_\varepsilon(.,T)|^2_{L^2(\omega)} = 2\,Re \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle + |u_0|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

et d'après la coercivité de $A_\varepsilon(u,v)$:

$$\alpha(T)\ \|u_\varepsilon|_{Q_T}\|^2_{F(Q_T)} + \|u_\varepsilon|_{Q'_T}\|^2_{F(Q'_T)} + (\frac{1}{\varepsilon} - 1)\,|u_\varepsilon|^2_{L^2(Q'_T)}$$
$$\leqslant\ |f|_{F'(Q_T)} \cdot \|u_\varepsilon\|_{F(Q_T)} + \frac{1}{2}|u_0|^2_{L^2(\Omega_0)} .$$

Par suite pour tout $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$:

(1) u_ε est bornée dans $F(\omega\times[0T])$

(2) $\dfrac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\Big|_{Q'_T}$ est bornée dans $L^2(Q'_T)$.

où $Q'_T = \omega \times [0T] - \overline{Q}_T$.

De toute suite $\varepsilon \longrightarrow 0$, on peut alors extraire une sous-suite $\eta \longrightarrow 0$ telle que :

(1') $u_\eta \rightharpoonup w$ dans $F(\omega\times[0T])$ faible.

(2') $\dfrac{u_\eta}{\sqrt{\eta}}\Big|_{Q'_T} \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(Q'_T)$ faible où $\theta(x,t) \in L^2(Q'_T)$.

Il résulte de (1') que :

$$u_\eta|_{Q'_T} \rightharpoonup w|_{Q'_T} \quad \text{dans } L^2(Q'_T) \text{ faible,}$$

et d'après (2') :

$$u_\eta|_{Q'_T} = \frac{u_\eta}{\sqrt{\eta}}\Big|_{Q'_T} \cdot \sqrt{\eta} \rightharpoonup 0 \quad \text{dans } L^2(Q'_T) \text{ faible,}$$

soit :

(3) $w|_{Q'_T} \equiv 0$

Comme $w \in F(\omega\times[0T])$, d'après le *Résultat III. 4.*, on peut définir $\gamma(D_p w)$ sur Γ'_T pour $|p| \leq m - 1$ et de (3) on déduit :

$$\gamma(D_p w) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma'_T \ , \ |p| \leq m_i - 1$$

soit d'après le *Résultat III. 4.* :

$$\underline{w|_{Q_T} \in F(Q_T)}.$$

Montrons que $w|_{Q_T}$ est solution de V :

Pour tout $\varphi \in B_T(Q_T)$ posons :

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \{\varphi(x,t) \quad \text{dans} \quad Q_T \ , \ 0 \quad \text{dans} \quad Q'_T)$$

où : $$Q'_T = \omega \times [0T] - \overline{Q}_T \ .$$

Alors $$\tilde{\varphi}(x,t) \in B_T(\omega\times[0T])$$

Prenons $\varphi \Rightarrow \tilde{\varphi}$, $\varepsilon \Rightarrow \eta$ dans le problème V_ε ; il vient :

$$a_T(u_\eta|_{Q_T},\varphi) - \langle u_\eta|_{Q_T},\varphi' \rangle = \langle f,\varphi \rangle + (u_0,\varphi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

où $\langle \ , \ \rangle$ désigne la dualité entre $F(Q_T)$ et $F'(Q_T)$.

Quand $\eta \longrightarrow 0$,

. la forme $u \longrightarrow a_T(u,\varphi)$ étant continue sur $H^{m,0}(Q_T)$,

$$a_T(u_\eta|_{Q_T} \ , \ \varphi) \longrightarrow a_T(w|_{Q_T} \ , \ \varphi) \quad \text{d'après} \quad (1') \ .$$

. $\langle u_\eta|_{Q_T} \ , \ \varphi' \rangle \longrightarrow \langle w|_{Q_T} \ , \ \varphi' \rangle$

et à la limite :

$$(4) \qquad a_T(w|_{Q_T}\ ,\ \varphi) - \langle w|_{Q_T}\ ,\ \varphi' \rangle =$$
$$\langle f\ ,\ \varphi \rangle + (u_0\ ,\ \varphi(0))_{L^2(\Omega_0)}, \forall\ \varphi \in B_T(Q_T)\ .$$

$w|_{Q_T}$ est alors solution du problème V.

Il reste à montrer que :

- $D_t(w|_{Q_T}) \in F'(Q_T)$ et $D_t(u_\eta|_{Q_T}) \longrightarrow D_t w|_{Q_T}$ dans $F'(Q_T)$.

De (4) on déduit, en prenant $\varphi \in \mathcal{D}(Q_T)$:

$$(5) \qquad D_t w|_{Q_T} + A\ w|_{Q_T} = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T)\ .$$

Mais pour $w|_{Q_T} \in F(Q_T)$, $A(w|_{Q_T}) \in F'(Q_T)$ et de (5)

$D_t w|_{Q_T} = f - A\ w|_{Q_T} \in F'(Q_T)$, car $\mathcal{D}'(Q_T)$ est dense dans $F'(Q_T)$.

(5) est alors vraie dans $F'(Q_T)$.

D'autre part la solution u_η de V_η vérifie :

$$A(u_\eta|_{Q_T}) + D_t(u_\eta|_{Q_T}) = f \quad \text{dans} \quad F'(Q_T)$$

Quand $\eta \longrightarrow 0$, A étant un opérateur linéaire continu de $H^{m,0}(Q_T)$ dans $F'(Q_T)$, il résulte de (1') :

$$A(u_\eta|_{Q_T}) \rightharpoonup A(w|_{Q_T}) \quad \text{dans} \quad F'(Q_T) \quad \text{faible}$$

D'où :

$$D_t(u_\eta|_{Q_T}) = f - A(u_\eta|_{Q_T}) \rightharpoonup f - A(w|_{Q_T})$$

soit

$$D_t(u_\eta|_{Q_T}) \rightharpoonup D_t(w|_{Q_T}) \quad \text{d'après (5), dans } F'(Q_T) \text{ faible}$$

$w|_{Q_T}$ est alors la solution unique du problème V et, la limite de $u_\eta|_{Q_T}$ étant indépendante de la sous-suite, la suite entière $u_\varepsilon|_{Q_T}$ converge vers $w|_{Q_T}$ dans $\mathcal{A}(Q_T)$.

A partir du théorème *III. 4.* nous allons montrer le :

Théorème III. 5. (de convergence forte) : quand $\varepsilon \longrightarrow 0$,

$$(III-23) \qquad u_\varepsilon|_{Q_T} \longrightarrow w|_{Q_T} \quad \text{dans } H^{m,0}(Q_T) \quad \text{fort.}$$

$$(III-24) \qquad u_\varepsilon|_{Q'_T} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } H^{m,0}(Q'_T) \quad \text{fort.}$$

$$(III-25) \qquad \frac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}\Big|_{Q'_T} \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(Q'_T) \quad \text{fort.}$$

Démonstration :

Prenons le produit scalaire (de $F(Q_T)$ avec $F'(Q_T)$) de (5) avec $w|_{Q_T}$; il vient :

$$\langle D_t w, w \rangle + \langle A\, w, w \rangle = \langle f, w \rangle$$

d'où

$$\langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle + 2\, Re\, a_T(w,w) = 2\, Re \langle f, w \rangle$$

Mais pour $w|_{Q_T} \in \mathcal{B}(Q_T)$, [11] :

$$\langle D_t w, w \rangle + \langle w, D_t w \rangle = |w(\cdot,T)|^2_{L^2(\Omega_T)} - |w(\cdot,0)|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

soit :

(III – 26)

$$|w(.,T)|^2_{L^2(\Omega_T)} + 2\,Re\; a_T(w|_{Q_T}, w|_{Q_T}) = 2\,Re \langle f, w|_{Q_T} \rangle + |u_0|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

De même l'égalité de l'énergie vérifiée par u_ε s'écrit :

(III – 27)

$$|u_\varepsilon(.,T)|^2_{L^2(\omega)} + 2\,Re\; A_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) = 2\,Re \langle \tilde{f}, u_\varepsilon \rangle + |u_0|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

Posons : $$N\,w = \begin{cases} w(x,t), & (x,t) \in Q_T \\ 0, & (x,t) \in Q'_T = \omega \times [0T] - \overline{Q}_T . \end{cases}$$

$w|_{Q_T} \in F(Q_T)$ implique : $N\,w \in F(\omega \times [0T])$

Considérons :

$$X_\varepsilon = |u_\varepsilon(.,T) - N\,w(.,T)|^2_{L^2(\omega)} + 2\,Re\; A_\varepsilon(u_\varepsilon - N\,w, u_\varepsilon - N\,w)$$

- En développant X_ε et en utilisant les égalités de l'énergie (III – 26), (III – 27) et le théorème III. 4. on montre facilement que :

$$X_\varepsilon \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad \varepsilon \longrightarrow 0$$

- D'autre part :

$$X_\varepsilon = 2\,Re\; a_T(u_\varepsilon|_{Q_T} - w, u_\varepsilon|_{Q_T} - w) + 2\,\|u_\varepsilon|_{Q'_T}\|^2_{H^{m,0}(Q'_T)}$$

$$+ 2\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) |u_\varepsilon|_{Q'_T}|^2_{L^2(Q'_T)} + |u_\varepsilon(.,T) - N\,w(.,T)|^2_{L^2(\omega)}$$

d'où :

$$X_\varepsilon \geq 2\,\alpha(T)\,\|u_\varepsilon|_{Q_T} - w\|^2_{H^{m,0}(Q_T)} + 2\,\|u_\varepsilon|_{Q'_T}\|^2_{H^{m,0}(Q_T)}$$

$$+ 2\left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) |u_\varepsilon|_{Q'_T}|^2_{L^2(Q'_T)}$$

quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ on en déduit (III – 23), (III – 24), (III – 25)

Interprétation du problème V_ε :

u_ε vérifie pour tout T fini :

$$D_t u_\varepsilon + A\, u_\varepsilon = f \quad \text{dans} \quad F'(Q_T)$$

$$D_t u_\varepsilon + \sum_{p=1}^{m} (-1)^p \Delta^p\, u_\varepsilon + \frac{u_\varepsilon}{\varepsilon} = 0 \quad \text{dans} \quad F'(Q'_T)$$

$\gamma_j u_\varepsilon = 0$ sur $S \times [0T]$, pour $j = 0,\ldots,m-1$, où $S = \partial\,\omega$.

+ conditions de passage (formelles) sur Γ'_T .

Autre choix des A_{pq} :

On aurait pu prendre :

$$A_{pq} = \{a_{pq}(x,t) \quad \text{dans} \quad Q_T \; ; \; \frac{1}{\varepsilon}\,\delta_{pq} \quad \text{dans} \quad Q'_T\} \;, \; \forall |p|, |q| \leq m \;.$$

Au lieu de (*III* – 23), (*III* – 24), (*III* – 25) on aurait :

$$(III-28) \qquad \begin{cases} u_\varepsilon|_{Q_T} \longrightarrow w|_{Q_T} & \text{fort dans } H^{m,0}(Q_T) \\ \dfrac{u_\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}}|_{Q'_T} \longrightarrow 0 & \text{fort dans } H^{m,0}(Q'_T) \end{cases}$$

Pratiquement on se fixera une limite de temps $t = T$, et l'on choisira l'ouvert ω tel que $\omega \times [\,0\;T\,] \supset Q_T$. On est alors ramené à résoudre le problème V_ε correspondant dans le domaine cylindrique $\omega \times [\,0\;T\,]$

Nous donnons maintenant une deuxième famille d'approximations du

problème V basée sur la méthode de GALERKIN généralisée au cas non cylindrique.

III - 3. Problème approché par la méthode de GALERKIN :

Nous supposons qu'il existe une base $\{ \varphi^j (x,t) , j = 1,2,... \}$ de $H_0^m (\Omega_t)$, pour tout $t \geq 0$, telle que :

- $\varphi^j (x,t) \in F (Q_T)$, $\forall T$ fini , $j = 1, 2, ...$
- $t \longrightarrow \varphi^j (x,t)$ soit une fois différentiable sur $[0\ T]$ pour tout $(x,t) \in Q_T$, T fini quelconque et $j \geq 0$.
- $(\varphi^j (t))$ $j = 1,2, ...$ forme un système orthonormal dans $L^2 (\Omega_t)$, $\forall t \in [0\ T]$. (On peut toujours s'y ramener).

Soit Φ_m $(m \geq 1)$ l'espace engendré par $\varphi^1 , \varphi^2 , ..., \varphi^m$:

$$\Phi_m = \{ u_m \mid u_m (x,t) = \sum_{i=1}^{m} u_{im} (t) \cdot \varphi^i (x,t) , u_{im} (t) \in \mathcal{C}^1 ([OT] \longrightarrow R) \}$$

Nous définissons le :

Problème approché V_m : Déterminer $u_m \in \Phi_m$ telle que :

$$(III\text{-}29) \quad a (t; u_m (t) , \varphi^j (t)) + (D_t u_m (t), \varphi^j (t))_{L^2 (\Omega_t)} = (f (t), \varphi^j (t))_{L^2 (\Omega_t)}$$

pour $j = 1, 2, ..., m$ et presque tout t dans $[OT]$.

$$(III\text{-}30) \quad u_{im} (0) = \alpha_{im} \quad , \quad i = 1, ..., m$$

où les α_{im} sont choisis tels que :

$$(III\text{-}31) \qquad \lim_{m \to \infty} \sum_{i=1}^{m} a_{im}\ \varphi^i(x,0) = u_0(x) \text{ dans } L^2(\Omega_0) \text{ fort.}$$

(III-31) sera vérifiée si on prend :

$$a_{im} = (u_0 , \varphi^i(x,0))_{L^2(\Omega_0)}$$

puisque $(\varphi^i(x,0))$ forme une base de $L^2(\Omega_0)$.

Nous remplaçons l'hypothèse H_2 du § III- 1-3 par :

$$H'_2 : f \in L^2(Q_T) = L^2(0T ; L^2(\Omega_t)) , \forall\ T > 0 \text{ fini.}$$

Théorème III-6 : Sous les hypothèses H_1 , H'_2, H_3 , H_4 et H_5 , le problème approché V_m admet une solution unique et de plus :

$$u_m \in F(Q_T) , u_m \in L^\infty(0T ; L^2(\Omega_t)) , \forall\ T > 0 \text{ fini.}$$

Démonstration :

Explicitons (III-29) ; pour $j = 1,\dots, m$

$$\sum_{i=1}^{m} \left[u_{im}(t)\ a(t ; \varphi^i(t), \varphi^j(t)) + (D_t (u_{im}(t)\ \varphi^i(t)) , \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)} \right]$$

$$= (f(t) , \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)}$$

Les $(\varphi^i(t))$ étant orthonormales dans $L^2(\Omega_t)$ il vient :

$$u'_{jm}(t) = - \sum_{i=1}^{m} \left[a(t ; \varphi^i(t) , \varphi^j(t)) + (\varphi^{i\,\prime\prime}(t) , \varphi^j(t)) \right] u_{im}(t)$$

$$+ (f(t) , \varphi^j(t)) \qquad \text{pour } j = 1,\dots,m \text{ ; p.p. en } t \in [0T]$$

$$u_{jm}(0) = a_{jm} \qquad j = 1,\dots m.$$

$(u_{jm}(t))$, $j = 1,\dots,m$ est donc solution d'un problème de Cauchy pour un système de m équations différentielles linéaires du premier ordre en t ; $t \in [0T]$

Existence et unicité de $(u_{jm}(t))$, $j = 1,\ldots m$

. $t \longrightarrow a(t; \varphi^i(t), \varphi^j(t))$ est mesurable et sommable sur $[0T]$ (et même dans $L^\infty([0T])$.

. $t \longrightarrow (\varphi^i(t), \varphi^j(t))$ et $t \longrightarrow (f(t), \varphi^j(t))$ sont mesurables et sommables sur $[0T]$.

Il s'ensuit qu'il existe une solution unique $u_{jm}(t)$, $j = 1,\ldots,m$ du système précédent, absolument continue sur $[0,T]$ *cf.* [14] par exemple.

$u_m \in F'(Q_T) \cap L^\infty(0T; L^2(\Omega_t))$

En multipliant les deux membres de (*III*-29) par $u_{jm}(t)$ et en sommant sur j de 1 à m, il vient :

$$a(t; u_m(t), u_m(t)) + (D_t u_m(t), u_m(t))_{L^2(\Omega_t)} = (f(t), u_m(t))_{L^2(\Omega_t)}$$

et :

$$\int_0^s a(t; u_m(t), u_m(t))\,dt + \int_0^s (D_t u_m(t), u_m(t))\,dt = \int_0^s (f(t), u_m(t))\,dt$$

mais :

$$\int_0^s [(D_t u_m(t), u_m(t)) + (u_m(t), D_t u_m(t))]\,dt$$

$$= |u_m(s)|^2_{L^2(\Omega_s)} - |u_m(0)|^2_{L^2(\Omega_0)}$$

(vérification immédiate en se servant du fait que $u_m(t) = 0$ sur la frontière latérale de Q_T, Γ_T).

D'où :

$$(III\text{-}32) \qquad |u_m(s)|^2_{L^2(\Omega_s)} + 2\,Re\int_0^s a(t; u_m(t), u_m(t))\,dt$$

$$= |u_m(0)|^2_{L^2(\Omega_0)} + 2\,Re\int_0^s (f(t), u_m(t))\,dt$$

et en minorant le premier membre à partir de la coercivité, il vient :

$$| u_m (s)|^2_{L^2(\Omega_s)} + 2\alpha \| u_m \|^2_{F(Q_s)} \leq |u_m (0)|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha \| u_m \|^2_{F(Q_s)} + \frac{1}{\alpha} | f |^2_{L^2(Q_s)}$$

Comme, d'après (*III-31*), $u_m (0) \longrightarrow u_0$ fortement dans $L^2(\Omega_0)$, on a :

$$|u_m (0)|_{L^2(\Omega_0)} \leq K \text{ , constante indépendante de } m.$$

et par suite :

(*III-33*)

$$\| u_m \|^2_{F(Q_s)} \leq K_1 = \frac{K^2}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} |f|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$| u_m (s)|^2_{L^2(\Omega_s)} \leq K_1 \text{ , } \forall \ s \in [0,T] .$$

d'où le théorème. On retrouve d'ailleurs l'unicité de u_m à partir de ces inégalités.

Montrons maintenant la convergence forte de u_m vers u . Nous avons le :

Théorème III-7 (de convergence forte) : quand $m \longrightarrow \infty$, $u_m \longrightarrow u$ dans $F(Q_T)$ fort et $L^\infty (0T ; L^2(\Omega_t))$ fort où u est "*une*" solution du problème initial V .

Démonstration :

De (*III-33*) on déduit que de toute suite $m \longrightarrow \infty$ on peut extraire une sous-suite $\mu \longrightarrow \infty$ telle que :

(1) $u_\mu \rightharpoonup u$ dans $F(Q_T)$ faible.

(2) $u_\mu \rightharpoonup u$ dans $L^\infty (0T ; L^2(\Omega_t))$ faible.

u est solution du problème initial V :

Soit :

$$W_m = \{ \psi \mid \psi (x,t) = \sum_{j=1}^{m} \psi_j (t) \varphi^j (x,t) \text{ , } \psi_j (t) \in \mathcal{D} ([0T[) \}$$

Multiplions (III-29) par $\psi_j(t)$ et sommons sur j de 1 à m ; il vient en intégrant sur $[0T]$:

$$\int_0^T a(t;u_m(t),\Psi(t))\,dt + \int_0^T (D_t u_m(t),\Psi(t))_{L^2(\Omega_t)}dt = \int_0^T (f(t),\Psi(t))_{L^2(\Omega_t)}dt$$

mais on voit facilement (à partir de $u_m = \psi = 0$ sur Γ'_T) que :

$$\int_0^T (D_t u_m(t),\psi(t))\,dt = -\int_0^T (u_m(t), D_t\psi(t))\,dt - (u_m(0),\psi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

pour tout $\psi \in W_m$.

Prenons $m = \mu$, W_n fixé avec $n < \mu$. On a :

$$a_T(u_\mu,\psi) - (u_\mu, D_t\psi)_{L^2(Q_T)} = (f,\Psi)_{L^2(Q_T)} + (u_\mu(0),\psi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

pour tout $\psi \in W_n$.

De (1), (2) et (III-30), on déduit quand $\mu \longrightarrow \infty$:

$$(3)\quad a_T(u,\psi) - (u, D_t\psi)_{L^2(Q_T)} = (f,\Psi)_{L^2(Q_T)} + (u_0,\psi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$\forall\ \psi \in W_n$, n entier positif quelconque.

Enfin, d'après les hypothèses faites sur $\varphi^j(x,t)$ et $\psi_j(t)$, quand $m \longrightarrow \infty$ W_m est dense dans $B_T(Q_T)$ où, rappelons le :

$B_T(Q_T)$ = adhérence des fonctions $\varphi \in F(Q_T)$, $\varphi' \in F'(Q_T)$ identiquement nulles au voisinage de Ω_T .

Alors en passant à la limite dans (3) suivant n il vient :

$$a_T(u,\varphi) - \langle u, D_t\varphi\rangle = \langle f,\varphi\rangle + (u_0,\varphi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$\forall\ \varphi \in B_T(Q_T)$; $u \in F(Q_T)$.

De là on montre, comme pour le Théorème *III-4* , que $D_t\, u \in F'(Q_T)$, c.a.d. que u est solution du problème V .

convergence forte de u_m *vers* u

Posons :

$$X_m = |u_m(s) - u(s)|^2_{L^2(\Omega_s)} + 2\,Re \int_0^s a(t; u_m - u, u_m - u)\,dt$$

définie pour $0 < s \leq T$, presque partout.

X_m s'écrit en développant :

$$X_m = [\,|u_m(s)|^2_{L^2(\Omega_s)} + 2\,Re\; a_s(u_m, u_m)\,]$$

$$+ [\,|u(s)|^2_{L^2(\Omega_s)} + 2\,Re\; a_s(u, u)]$$

$$- 2[\,Re\;(u_m(s), u(s))_{L^2(\Omega_s)} + 2\,Re\; a_s(u_m, u)]$$

En utilisant les égalités de l'énergie (*III-26*) et (*III-32*) vérifiées par u et u_m , puis la convergence faible de u_m vers u , il vient :

$$X_m \longrightarrow 0 \qquad \text{quand} \qquad m \longrightarrow \infty .$$

D'autre part de la coercivité de $a_s(u,v)$ il vient :

$$X_m \geq |u_m(s) - u(s)|^2_{L^2(\Omega_s)} + 2\alpha \,\|u_m - u\|^2_{F(Q_s)}$$

soit :

$$u_m(s) \longrightarrow u(s) \qquad \text{dans} \qquad L^\infty(0T;\, L^2(\Omega_s)) \text{ fort.}$$

$$u_m \longrightarrow u \qquad \text{dans} \qquad F(Q_s \text{ fort.}$$

ce qui démontre le théorème.

On vient ainsi de redémontrer l'existence d'une solution du problème initial V et de généraliser la méthode de GALERKIN au cas non cylindrique.

Pratiquement pour m fixé, on aura à résoudre un système de m équations différentielles linéaires d'ordre 1 , la difficulté consistant à construire des fonctions $\varphi^j(x,t)$ ayant les propriétés voulues.

III-4 *Problème approché par la méthode variationnelle des différences finies.*

III-4- 1 *Construction du problème approché.*

Nous allons associer au problème initial V une famille de problèmes approchés au sens des différences finies, dont la construction sera semblable à celle donnée dans RAVIART [15] pour un domaine cylindrique, avec les modifications nécessaires dues au fait que le domaine varie avec le temps.

Nous supposerons, comme au § III-3 , que $f \in L^2(Q_T)$. Posons, pour simplifier nos notations :

$$\begin{cases} V(t) = H_0^m(\Omega_t) \ , \ V'(t) = H^{-m}(\Omega_t) \\ H(t) = L^2(\Omega_t) \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,T]. \end{cases}$$

Avec ces notations le problème initial V peut s'écrire :

Problème V_1 : Déterminer $u \in L^2(0,T\,;\,V(t))$, $u' \in L^2(0T\,;\,V'(t))$ telle que :

$$(III\text{-}34) \qquad \int_0^T \left[a(t\,;\,u(t),\varphi(t)) - \langle u(t), \varphi'(t) \rangle \right] dt =$$

$$\int_0^T (f(t), \varphi(t))\, dt + (u_0\,,\,\varphi(\,\cdot\,,0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\forall \varphi \in \Phi(Q_T) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0T\,;\,V(t)),\ \varphi' \in L^2(0T\,;\,V'(t)),\ \varphi(\cdot,T) = 0\}$$

où , dans ce paragraphe , $\langle\ ,\ \rangle$ désigne la dualité entre $V(t)$ et $V'(t)$, et $(f(t), g(t)))$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega_t)$

L'équivalence des problèmes V et V_1 découle des résultats du § *III*- 1 - 2 c'est à dire pour Q assez régulier.

Nous allons approcher le problème initial sous la forme V_1. Pour cela nous introduisons pour tout $t \geq 0$:

. $V_h(t)$ Une famille d'espaces de Hilbert sur C (associée à $H(t)$ et $V(t)$) dépendant du paramètre $h = (h_1, \ldots, h_n)$ $h_i > 0$ assez petits, que nous supposerons munis de deux produits scalaires : $(\ ,\ )_{V_h(t)}$ et $((\ ,\ ))_{V_h(t)}$. Soient : $|\ \ |_{V_h(t)}$, $\|\ \ \|_{V_h(t)}$ les deux normes associées telles que : $\forall\, u_h \in V_h(t)$:

(*III*-35) $$c(h,t)\ |u_h|_{V_h(t)} \leq \|u_h\|_{V_h(t)} \leq C(h,t)\ |u_h|_{V_h(t)}$$

pour h et t fixés, où $C(h,t) \longrightarrow +\infty$ quand $|h| \longrightarrow 0$ avec t fixé. *Cf.* [2], [1] pour l'introduction des $V_h(t)$ et l'étude de leurs propriétés.

. $O_h(t)$ Une famille d'opérateurs linéaires continus de $L^2(\Omega_t) = H(t)$ dans $V_h(t)$ tels que :

$$|O_h(t)|_h = \sup_{u \in H(t)} \frac{|O_h(t)\ u|_{V_h(t)}}{|u|_{H(t)}} \leq C_1$$

C_1 : constante positive indépendante de h et $t \in [0,T]$

. $a_h(t\,;\, u_h, v_h)$ Une famille de formes sesquilinéaires continues sur $V_h(t) \times V_h(t)$ telle que pour tout $u_h, v_h \in V_h(t)$:

(*III*-36) $$|a_h(t\,;\, u_h, v_h)| \leq M\ \|u_h\|_{V_h(t)}\ \|v_h\|_{V_h(t)}$$

(*III*-37) $$|a_h(t;\ u_h\ ;\ v_h)| \leq M(h,t)\ |u_h|_{V_h(t)} \cdot |v_h|_{V_h(t)}$$

(*III*-38) $$|a_h(t\,;\, u_h, v_h)| \leq N(h,t)\ \|u_h\|_{V_h(t)} \cdot |v_h|_{V_h(t)}$$

(III-39) $\quad Re\, a_h(t;u_h,u_h) \geq \alpha \|u_h\|^2_{V_h(t)}$

où $M > 0$, $\alpha > 0$ sont indépendants de h et $t \in [0,T]$
$M(h,t) > 0$, $N(h,t) > 0$ avec :
$M(h,t) = O(N(h,t)^2)$ quand $|h| \longrightarrow 0$, t fixé.

. $0, k, 2k, \ldots, mk = T$ Un partage de l'intervalle $[0,T]$ en sous-intervalles de longueur k et :
$W_r(t)$ = fonction caractéristique de $[rk, (r+s)k[$

. *Pour r entier et $p \geq 0$, $q \leq 0$*, posons :

$$V_{h,q}^{p}(rk) = \bigcap_{t \in [(r+q)k,\,(r+p)k[} V_h(t)$$

muni de la norme de $V_h(rk)$ par exemple.

. *Soit ω un ouvert de $\mathbb{R}^n_x$* contenant Ω_t pour tout $t \in [0,T]$ et $V_h(\omega)$ l'espace de Hilbert "*discrétisé*" sur C, qui est associé à $L^2(\Omega_t)$ et $H_0^m(\Omega_t)$.

Nous noterons : $(\ ,\ )_h$, $((\ ,\ ))_h$ les deux produits scalaires dont il est muni et $|\ |_h$, $\|\ \|_h$ les normes qui s'en déduisent.

Pour $u_h \in V_h(t)$, soit $\tilde{u}_h$ le "*prolongement par 0*" de u_h en dehors de son support. Nous supposerons que : si $u_h \in V_h(t)$ alors $\tilde{u}_h \in V_h(\omega)$.

. *Soit $\Pi_q^p(rk)$*, $p \geq 0$, $q \leq 0$, une famille d'opérateurs linéaires (de restriction) de $V_h(\omega)$ dans $V_{h,q}^{p}(rk)$, pour $r = 0, 1, \ldots, m$ tels que :

.. (III-40) $\quad \Pi_q^p(rk)\,\tilde{u}_h = u_h$ dans $V_h(rk)$, $\forall\ u_h \in V_{h,q}^{p}(rk)$

. (III-41) $\quad |\Pi_q^p(rk)\tilde{u}_h - u_h|_{V_h(rk)} \leq \epsilon_{p,q}(h,k)\cdot |u_h|_{V_h(rk)}, \forall\ u_h \in V_h(rk)$

. (III-42) $\quad \|\Pi_q^p(rk)\tilde{u}_h - u_h\|_{V_h(rk)} \leq \eta_{p,q}(h,k)\cdot \|u_h\|_{V_h(rk)}, \forall\ u_h \in V_h(rk)$

où $\epsilon_{p,q}(h,k)$, $\eta_{p,q}(h,k)$ tendent vers zéro quand $k \longrightarrow 0$ avec $t = rk$ fixé.*

Nous supposerons de plus :

(III-43) $$|\Pi_q^p(rk)\,\tilde{u}_h|_{V_h(t)} \leq |\Pi_n^m(rk)\,\tilde{u}_h|_{V_h(t)}$$

et

(III-44) $$\|\Pi_q^p(rk)\,\tilde{u}_h\|_{V_h(t)} \leq \|\Pi_n^m(rk)\,\tilde{u}_h\|_{V_h(t)} \quad \text{si} \quad \begin{cases} 0 \leq m \leq p \\ 0 \geqslant n \geqslant q \end{cases}$$

où $u_h \in V_h(t)$ avec $t = rk$.

Posons :

$$\Pi_q^p(t) = \Pi_q^p(rk) \qquad \forall\ t \in [rk, (r+1)k[.$$

Nous appellerons :

$E_q^p(r_1 k\ ,\ r_2 k\ ;\ V_h(t))$ = l'espace des fonctions $u_{hk}(t)$ de la forme :

$$u_{hk}(t) = \sum_{r=r_1}^{r_2-1} u_{hk}(rk)\cdot W_r(t)\ , \quad \text{avec} \quad u_{hk}(rk) \in V_h^{p,q}(rk).$$

Pour $u_h \in V_h(t)$, la forme $v_h \longrightarrow a_h(t\ ;\ u_h, v_h)$ est antilinéaire continue sur $V_h(t)$ et définit un opérateur :

$A_h(t) \in \mathcal{L}(V_h(t)\ ,\ V_h(t))$ tel que :

$$a_h(t\ ;\ u_h, v_h) = (A_h(t)u_h\ ,\ v_h)_{V_h(t)}\ , \quad \forall\ u_h\ ,\ v_h \in V_h(t)$$

Pour $u_{hk} \in E_0^1(0,\ T+k\ ;\ V_h(t))$ posons :

(III-45) $$A_{hk}(t)\,u_{hk}(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \int_{rk}^{(r+1)k} A_h(s)u_{hk}(s)\,ds.\ W_r(t)$$

---

* Nous supposerons que $\epsilon_{p,q}(h,k)$, $\eta_{p,q}(h,k)$ sont de la forme $0(h).0(k)$

et définissons une forme sesquilinéaire continue sur

$$E_0^1(0, T+k; V_h(t)) \times E_0^1(0, T+k; V_h(t)) \text{ par :}$$

(III-46)

$$a_{hk}(t; u_{hk}(t), v_{hk}(t)) = (A_{hk}(t)\, u_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)}$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{r=1} \int_{rk}^{(r+1)k} a_h(s; u_{hk}(s)), v_{hk}(s)) ds.\ W_r(t)$$

ce qui a bien un sens car $u_{hk}(s)$, $v_{hk}(s) \in V_{h,0}^1(rk)$.

. Posons enfin :

$$(III\text{-}47) \quad f_{hk}(t) = \frac{1}{k} \sum_{r=0}^{m-1} \int_{rk}^{(r+1)k} O_h(s).\, f(s)\, ds.\ W_r(t)$$

$$(III\text{-}48) \quad \nabla_k \varphi(t) = \frac{\varphi(t+k) - \varphi(t)}{k}\ ;\ \bar{\nabla}_k \varphi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t-k)}{k}$$

Nous définissons alors le problème approché au sens des différences finies par :

Problème P_{hk} Déterminer $u_{hk} \in E_{-1}^0(0, T+k; V_h(t))$ telle que :

. (III-49)

$$(\Pi_0^1(t)\, \nabla_k\, \tilde{u}_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)} + a_{hk}(t; \Pi_0^1(t)(\tilde{u}_{hk}(t) + \theta k \nabla_k \tilde{u}_{hk}(t)), v_{hk}(t))$$

$$= (f_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)} \quad , \quad \forall\ t \in [0, T[\ ,\ \theta \in [0, 1] \text{ donné}$$

$$\forall\ v_{hk} \in E_0^1(0, T+k; V_h(t))$$

. (III-50) $\quad u_{hk}(0) = O_h(0) \cdot u_0$.

Résultat III-8 Pour h et k fixés, le problème P_{hk} admet une solution unique.

Démonstration :

- $u_{hk}(0)$ est déterminé par (III-50)
- Supposons connu $u_{hk}(rk)$ dans $V^0_{h,-1}(rk)$. D'après (III-49) $u_{hk}((r+1)k)$ est solution dans $V^0_{h,-1}((r+1)k) \equiv V^1_{h,0}(rk)$ de :

. (III-51) $\quad \hat{a}_{hk}(rk\,;\, u_{hk}((r+1)k),\ v_{hk}(rk)) = (d_{hk}(rk),\ v_{hk}(rk))$
$\forall\, v_{hk}(rk) \in V^1_{h,0}(rk)$

où

- $\hat{a}_{hk}(rk\,;\, u_h, v_h) = (u_h, v_h)_{V_h(t)} + k\ a_{hk}(rk\,;\, u_h, v_h)$
- d_{hk} est connu à partir de $u_{hk}(rk)$ et des données.

Nous avons pour tout $v_h \in V^1_{h,0}(rk)$:

$$\hat{a}_{hk}(rk\,;\, v_h, v_h) \geq |v_h|^2_{V_h(t)} + k\ \alpha\ \|v_h\|^2_{V_h(t)}$$

ce qui implique l'existence et unicité de $u_{hk}((r+1)k)$ dans $V^1_{h,0}(rk)$ *cf.* [7].

Interprétons le problème résolu :

u_{hk} *vérifie* :

$$u_{hk} \in E^0_{-1}(0,\ T+k\ ;\ V_h(t))$$

. (III-52) $\quad \dfrac{u_{hk}(t+k) - \Pi^1_0(t)\ \tilde{u}_{hk}(t)}{k} + \theta\ A_{hk}(t) \cdot u_{hk}(t+k)$

$$+ (1-\theta)\ A_{hk}(t) \cdot (\Pi^1_0(t)\ \tilde{u}_{hk}(t)) = f_{hk}(t),\ \forall\ t \in [\,0, T[\ .$$

et

. (III-53) $\quad u_{hk}(0) = O_h(0) \cdot u_0$ dans $V_h(0)$

. III-4-2 *Majorations a priori et stabilité de la solution de* P_{hk}

Nous allons établir des "*inégalités a priori*" vérifiées par la solution u_{hk} de P_{hk}; nous généraliserons ensuite la définition de la stabilité donnée dans [15], dans le cas où le domaine dépend du temps et nous énoncerons le théorème de stabilité vérifié par le schéma définissant u_{hk} .

. *Majorations a priori*

Dans (*III-49*) prenons :

$$v_{hk}(t) = g_{hk}(t) = \Pi_0^1(t)\,[\,\tilde{u}_{hk}(t) + \theta\, k\, \nabla_k\, \tilde{u}_{hk}(t)\,]$$

ou : $$g_{hk}(t) = (1-\theta)\,\Pi_0^1(t)\,\tilde{u}_{hk}(t) + \theta\, u_{hk}(t+k)$$

car $$u_{hk}(t+k) \in V_{h,0}^1(t).$$

Il vient pour $t \in [\,0,T\,[$

$$(\Pi_0^1(t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t), g_{hk}(t))_{V_h(t)} + a_{hk}(t\,;\ g_{hk}(t), g_{hk}(t)) = (f_{hk}(t),\ g_{hk}(t))_{V_h(t)}$$

Evaluons le premier terme pour $t \in [\,rk,\ (r+1)k\,[\ ,\ r=0,\dots,m-1$

$$2\,Re\,(\Pi_0^1(t)\,\nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t),\ g_{hk}(t))_{V_h(t)} =$$

$$2\,\theta k\,|\Pi_0^1(t)\,\nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t)|^2_{V_h(t)} + 2\,Re\,(\Pi_0^1(t)\,\nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t), \Pi_0^1(t)\,\tilde{u}_{hk}(t))_{V_h(t)}$$

Mais on voit facilement que pour $t \in [\,rk,\ (r+1)k\,[$:

$$2\,Re\,(\Pi_0^1(t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t), \Pi_0^1(t)\,\tilde{u}_{hk}(t))_{V_h(t)} =$$

$$\frac{1}{k}\ [\,|\Pi_0^1(t)\,\tilde{u}_{hk}((r+1)k)|^2_{V_h(t)} - |\Pi_0^1(t)\,\tilde{u}_{hk}(rk)|^2_{V_h(t)}\,] - k\,|\Pi_0^1(t)\,\nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t)|^2_{V_h(t)}$$

D'où en reportant : $\forall\ t \in [\, rk,\ (r+1)\, k[$:

$$(III\text{-}54)\quad \frac{1}{k}\left[\left|\Pi_0^1\ (t)\ \tilde{u}_{hk}\ (t+k)\right|^2_{V_h(t)} - \left|\Pi_0^1\ (t)\ \tilde{u}_{hk}(t)\right|^2_{V_h(t)}\right]$$

$$+(2\theta - 1)k\ \left|\Pi_0^1\ (t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t)\right|^2_{V_h(t)} + 2\ Re\ a_{hk}(t\ ;\ g_{hk}(t),\ g_{hk}(t))$$

$$= 2\ Re\ (f_{hk}(t),\ g_{hk}(t))_{V_h(t)}.$$

Nous distinguerons deux cas :

1er cas . $\theta \geq \frac{1}{2}$

De l'égalité (*III-54*) il vient en utilisant la coercivité (*III-39*) de $a_h(t\ ;\ u_h\ ,\ v_h)$: $\forall\ t \in [\, 0,\ T\, [$:

$$(III\text{-}55)\quad \frac{1}{k}\left[\left|\Pi_0^1\ (t)\ \tilde{u}_{hk}(t+k)\right|^2_{V_h(t)} - \left|\Pi_0^1\ (t)\ \tilde{u}_{hk}(t)\right|^2_{V_h(t)}\right]$$

$$+ 2\ \alpha\ \left\| g_{hk}(t)\right\|^2_{V_h(t)}$$

$$\leq k_0\ \left|f_{hk}(t)\right|^2_{V_h(t)} + \left|\frac{1-\theta}{k_0}\right|\ \left|\Pi_0^1\ (t)\tilde{u}_{hk}(t)\right|^2_{V_h(t)}$$

$$+ \frac{\theta}{k_0}\ \left|\Pi_0^1(t)\ \tilde{u}_{hk}(t+k)\right|^2_{V_h(t)}$$

où k_0 est une constante positive arbitraire.

Lemme III - 1 . Pour $0 < r \leq m$:

$$D = \int_0^{rk} \frac{1}{k}\ \left[\left|\Pi_0^1(t)\ \tilde{u}_{hk}(t+k)\right|^2_{V_h(t)} - \left|\Pi_0^1\ (t)\ \tilde{u}_{hk}(t)\right|^2_{V_h(t)}\right] dt.$$

$$\geq \left|u_{hk}(rk)\right|^2_{V_h(rk)} - \left|\Pi_0^1(0)\ u_{hk}(0)\right|^2_{V_h(0)}$$

Démonstration du lemme III-1 :

$$D = \sum_{s=1}^{r-1} \left[|\Pi_0^1((s-1)k)\ \tilde{u}_{hk}(sk)|^2_{V_h(sk)} - |\Pi_0^1(sk)\ \tilde{u}_{hk}(sk)|^2_{V_h(sk)} \right]$$

$$+ |\Pi_0^1((r-1)k)\ \tilde{u}_{hk}(rk)|^2_{V_h(rk)} - |\Pi_0^1(0)\ \tilde{u}_{hk}(0)|^2_{V_h(0)}$$

Mais d'après (*III-40*):

$$\Pi_0^1((s-1)k)\ \tilde{u}_{hk}(sk) = u_{hk}(sk) \quad \text{car} \quad u_{hk}(sk) \in V^1_{h,0}((s-1)k)$$

et d'après (*III-43*) :

$$|u_{hk}(sk)|^2_{V_h(sk)} - |\Pi_0^1(sk)\ u_{hk}(sk)|^2_{V_h(sk)} \geq 0.$$

Le lemme suit immédiatement.

. Intégrons l'inégalité (*III-55*) de 0 à rk ($r \leq m$). En utilisant le lemme *III-1* et (*III-43*) il vient :

$$|u_{hk}(rk)|^2_{V_h(rk)} + 2\alpha \int_0^{rk} \|g_{hk}(t)\|^2_{V_h(t)}\, dt \leq |u_{hk}(0)|^2_{V_h(0)}$$

$$+ k_0 \int_0^{rk} |f_{hk}(t)|^2_{V_h(t)}\, dt + \left|\frac{1-\theta}{k_0}\right| \int_0^{rk} |u_{hk}(t)|^2_{V_h(t)}\, dt$$

$$+ \frac{\theta}{k_0} \int_k^{(r+1)k} |u_{hk}(t)|^2_{V_h(t)}\, dt$$

On en déduit comme dans [15]:

$$|u_{hk}(rk)|^2_{V_h(rk)} + 2\alpha \int_0^{rk} \|g_{hk}(t)\|^2_{V_h(t)}\, dt$$

$$\leq \left\{ (1 + |1-\theta|)\ |u_{hk}(0)|^2_{V_h(0)} + k_0 \int_0^T |f_{hk}(t)|^2_{V_h(t)}\, dt \right\} \exp.\frac{(\theta + |1-\theta|)T}{k_0}$$

Des hypothèses faites sur $O_h(t)$ il découle :

$$|u_{hk}(0)|_{V_h(0)} \leq C_1 \ |u_0|_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\int_0^T |f_{hk}(t)|^2_{V_h(t)} \ dt \leq C_1 \int_0^T |f(t)|^2_{H(t)} dt .$$

D'où en posant :

$$K^2 = C_1^2 \left[(1 + |1-\theta|) \ | u_0 |^2_{L^2(\Omega_0)} + k_0 \int_0^T |f(t)|^2_{H(t)} \ dt \right]$$

$$(III\text{-}56) \qquad |u_{hk}(t)|^2_{V_h(t)} \leq K^2 \ exp. \ \frac{(\theta + |1-\theta|)T}{k_0}$$

$$(III\text{-}57) \qquad \int_0^T \| (1-\theta) \ \Pi_0^1(t) \ \tilde{u}_{hk}(t) + \theta \ u_{hk}(t+k) \|^2_{V_h(t)} \ dt$$

$$\leq K^2 \ exp. \ \frac{(\theta + |1-\theta|)T}{k_0}$$

2ème cas . $\theta < \frac{1}{2}$

Dans (III-54) le coefficient de $| \Pi_0^1(t) \nabla_k \ \tilde{u}_{hk}(t)|^2_{V_h(t)}$ est alors négatif. Pour majorer ce terme on prendra :

$$v_{hk} = \Pi_0^1 (t) \ \nabla_k \ \tilde{u}_{hk}(t) \ \in \ E_0^1 (0, T+k ; V_h(t)) \ \text{dans (III-49)}$$

En poursuivant le raisonnement comme dans [15], avec des modifications analogues au premier cas, on montre que :

$$\text{pour} \quad k \ N(h)^2 \leq \frac{2\alpha}{1 - 2\theta} (1 - \delta) \quad 0 < \delta < 1 \ \text{arbitraire}$$

$$\text{où} \quad N(h) = \max_{t \in [0T]} N(h,t), \quad \text{on a :}$$

(III-58) $$|u_{hk}(t)|^2_{V_h(t)} \leq K_1^2 \exp. \frac{T}{k_0}$$

(III-59) $$\int_0^T \| (1-\theta)\, \Pi_0^1(t)\, u_{hk}(t) + \theta\, u_{hk}(t+k) \|^2_{V_h(t)} dt \leq K_1^2 \exp. \frac{T}{k_0}$$

avec :

$$K_1^2 = \frac{C_1^2}{2\alpha\delta^2} \left[(2-\theta) |u_0|^2_{L^2(\Omega_0)} + (2 + \frac{1}{\delta}) k_0 \int_0^T |f(t)|^2_{H(t)} dt \right]$$

Définition de la stabilité :

Soient $X(t)$ une famille d'espaces de Banach dépendant du paramètre t $(t \geq 0)$ et $p_h(t)$ une famille d'applications linéaires continues de $V_h(t)$ dans $X(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Définition III-1 :

La solution u_{hk} du problème P_{hk} est dite $L^\infty(0T ; X(t))$ stable pour le prolongement p_h si :

(III-60) $t \longrightarrow \| p_h(t)\, u_{hk}(t) \|_{X(t)}$ est mesurable sur $[0T]$ quels que soient h et k.

(III-61) $\| p_h(t)\, u_{hk}(t) \|_{X(t)} \leq A, \quad \forall\ t \in [0T[$.

On aurait une définition similaire pour $L^p(0T ; X(t))$, p fini.

Soit maintenant pour tout $t \in [0T]$:

- $F(t)$ une famille d'espaces de Hilbert tels que $H(t)$ soit un sous-espace vectoriel fermé de $F(t)$
- $\Pi r(t)$ l'opérateur de projection de $F(t)$ sur $H(t)$
- $p_h(t)$ $\in \mathcal{L}(V_h(t), F(t))$ tels que :

(III-62) $t \longrightarrow \| p_h(t)\, u_h(t) \|_{F(t)}$ soit mesurable sur $[0T]$

$\forall\ u_h(t) \in V_h(t),\ t \in [0T]$

(III-63) $$\| p_h(t) \| = \sup_{u_h \in V_h(t)} \frac{\| p_h(t)\, u_h \|_{F(t)}}{\| u_h \|_{V_h(t)}} \leq C_2$$

C_2 : constante positive indépendante de h et $t \in [0T]$

• Posons $q_h(t) = \Pi r \circ p_h(t)$ alors $q_h(t) \in \mathcal{L}(V_h(t), H(t))$

et nous supposerons que :

(III-64) $$|q_h| = \sup_{u_h \in V_h(t)} \frac{|q_h(t)\, u_h|\, H(t)}{|u_h|_{V_h(t)}} \leq C_3$$

C_3 : constante positive indépendante de h et $t \in [0T]$.

Des majorations a priori (III-56), (III-57), (III-58), (III-59) et des hypothèses (III-62), (III-64), on déduit le :

Théorème III-8 (de stabilité pour le prolongement q_h)

1) Pour $\theta \geq \frac{1}{2}$, la solution u_{hk} du problème P_{hk} est $L^\infty(0T ; L^2(\Omega_t))$ stable quels que soient h et k.

2) Pour $\theta < \frac{1}{2}$, une condition suffisante pour que u_{hk} soit $L^\infty(0T ; L^2(\Omega_t))$ stable est que :

(III-65) $$k\ \nu(h)^2 \leq \frac{2\alpha}{1 - 2\theta}(1 - \delta),\ \delta > 0 \text{ arbitrairement petit}$$

où $\nu(h)$ est la partie principale de $N(h)$ quand $|h| \longrightarrow 0$.

III-4-3 *Convergence de u_{hk} vers une solution du problème initial*

Nous nous plaçons sous les hypothèses du *Théorème III-8* en prenant $\theta = 0$ (schéma explicite).

Nous savons alors que :
quand h et $k \longrightarrow 0$, on peut extraire une sous-suite notée encore (h,k) telle que :

(III-66) $[p_h(t)\ \Pi_0^1(t)\ \tilde{u}_{hk}(t)]_0^T \longrightarrow U$ dans $L^2(0T;\ F(t))$ faible.

(III-67) $[q_h(t)\ u_{hk}(t)]_0^T \longrightarrow u = \Pi r\ U$ dans $L^\infty(0T;\ H(t))$ faible où $[\varphi]_0^T$ désigne la restriction de $\varphi(t)$ à $[0T]$.

Soient :

- $\mathcal{V}$ = l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{Q}_T)$ nulles au voisinage de Γ'_T (frontière latérale de (Q_T)).

D'après [11] on sait que $\mathcal{V}$ est dense dans $B_T(Q_T)$, où, rappelons le: $B_T(Q_T)$ = adhérence des fonctions $v \in F(Q_T)$, $v' \in F'(Q_T)$ nulles au voisinage de Ω_T .

- $r_k(t)$ une famille d'applications linéaires continues de $\mathcal{D}(\Omega_t)$ dans $V^0_{h,-1}(t)$. Pour $v(x,t) \in \mathcal{V}$, nous posons :

(III-68) $$\Psi_{hk}(t) = \sum_{r=0}^{m-1} r_h(rk)\ v(x,\ rk).\ W_{r-1}(t)$$

Par définition de $r_h(t)$ et de $\mathcal{V}$ on déduit :

$\Psi_{hk}(t) \in E_0^1(0,\ T+k\ ;\ V_h(t))$ et $\Psi_{hk}(T) = 0$

- $\bar{\omega}(t) \in \mathcal{L}(V(t), F(t))$ où $V(t) = H_0^m(\Omega_t)$

Nous faisons les hypothèses suivantes analogues à celles de [15] pour un domaine cylindrique.

Pour toute de suite (u_{hk}) vérifiant (III-66), (III-67) :

II-69) $\quad u \in L^2(0T,\ V(t))$ et $U = \bar{\omega}\, u$

(III-70) $\quad \int_0^T a_{hk}\ (t\ ;\ \Pi_0^1\ (t)\ \tilde{u}_{hk}(t),\ \Psi_{hk}(t))\ dt \longrightarrow \int_0^T a(t;\ u(t),\ v(t))dt$

pour tout $v \in V$, quand $|h|$ et $k \longrightarrow 0$.

(III-71) $\quad \int_0^T (u_{hk}(t),\ \bar{\nabla}_k\ \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt \longrightarrow \int_0^T (u(t),\ v'(t))_{H(t)}\ dt.$

(III-72) $\quad \int_0^T (O_h(t)\ f(t),\ \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt \longrightarrow \int_0^T (f(t),\ v(t))_{H(t)}\ dt.$

quand $|h|$ et $k \longrightarrow 0$, $\forall\ v \in V$.

(III-73) $(O_h(0)\ u_0, \Psi_{hk}(-k))_{V_h(0)} \longrightarrow (\dot{u}_0,\ v(0))_{H(0)}$. quand $\forall\ v \in V$ $|h|$, $k \longrightarrow 0$

Démontrons le :

Théorème III-9. de convergence faible : quand $|h|$, $k \longrightarrow 0$, sous les hypothèses (III-69),..., (III-73) :

(III-74) $\quad [P_h(t)\ \Pi_0^1(t)\ \tilde{u}_{hk}(t)]_0^T \longrightarrow \varpi\ u$ dans $L^2\ (0T\ ;\ F(t))$ faible

(III-75) $\quad [q_h(t)\ u_{hk}(t)]_0^T \longrightarrow u$ dans $L^\infty\ (0T\ ;\ H(t))$ faible.

où u est une solution du problème initial V_1 .

Démonstration : Prenons $v_{hk} = \Psi_{hk}(t) \in E_0^1\ (0, T+k\ ;\ V_h(t))$ dans (III-49) pour v quelconque dans $\mathcal{V}$. Il vient :

$$\int_0^T (\Pi_0^1(t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt + \int_0^T a_{hk}(t\ ;\ \Pi_0^1(t)\ \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))\ dt$$

$$= \int_0^T (f_{hk}(t), \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt$$

Mais :

$$\int_0^T \left(\Pi_0^1(t)\, \nabla_k\, \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t) \right)_{V_h(t)} dt =$$

$$\frac{1}{k} \left[\int_0^T \left(u_{hk}(t), \Psi_{hk}(t-k) \right)_{V_h(t)} dt - \int_0^T \left(\Pi_0^1(t)\, \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t) \right)_{V_h(t)} dt \right]$$

$$- \left(u_{hk}(0), \Psi_{hk}(-k) \right)_{V_h(0)}$$

$$= - \int_0^T \left(u_{hk}(t), \nabla_k\, \Psi_{hk}(t) \right)_{V_h(t)} dt - \left(u_{hk}(0), \Psi_{hk}(-k) \right)_{V_h(0)}$$

$$+ \frac{1}{k} \int_0^T \left(u_{hk}(t) - \Pi_0^1(t)\, \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t) \right)_{V_h(t)} dt$$

Quand $|h|$ et k tendent vers 0, des hypothèses (*III-71*), (*III-73*), (*III-4I*) et du théorème de stabilité il suit :

$$\int_0^T \left(\Pi_0^1(t)\, \nabla_k\, \tilde{u}_{hk}(t), \Psi_{hk}(t) \right)_{V_h(t)} dt \longrightarrow - \int_0^T \left(u(t), v'(t) \right)_{H(t)} dt + (u_0, v(0$$

$$\cdot \int_0^T \left(f_{hk}(t), \Psi_{hk}(t) \right)_{V_h(t)} dt = \int_0^T \left(O_h(t)\, f(t), \Psi_{hk}(t) \right)_{V_h(t)} dt$$

d'après (*III-47*).

Et à la limite pour $|h| \longrightarrow 0$, $k \longrightarrow 0$, il vient d'après (*III-70*) et (*III-72*) :

(*III-76*)

$$\int_0^T \left[-\left(u(t), v'(t) \right)_{H(t)} + a\,(t, u(t), v(t)) \right] dt = \int_0^T \left(f(t), v(t) \right) dt$$

$$+ \left(u_0, v(0) \right)_{L^2(\Omega_0)}, \quad \forall\, v \in V$$

Mais de la densité de $\mathcal{V}$ dans $B_T(Q_T)$ on déduit de (III-76) :

$$\int_0^T \left[- \langle u(t),\, D_t\, v \rangle + a(t;\, u(t),\, v(t)) \right] dt$$

$$= \int_0^T \langle f(t),\, v(t) \rangle \, dt + (v(\cdot,0),\, u_0)_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\forall \quad v \quad \epsilon \quad B_T \quad (Q_T)$$

où : $u \ \epsilon \ L^2 \ (0T ; \ H_0^m \ (\Omega_t)) \equiv F(Q_T)$.

u est alors solution du problème initial V_1 et d'après l'unicité de cette solution la suite toute entière (h,k) vérifie (III-74) et (III-75)

III-4-4 Exemple de construction du problème approché P_{hk}

Nous considérons le problème V_1 pour un opérateur $A(t)$ d'ordre deux. Nous avons alors :

$$H(t) = L^2 \ (\Omega_t) ; \qquad V(t) = H_0^1 \ (\Omega_t) ; \qquad V'(t) = H^{-1} \ (\Omega_t)$$

et

(III-77)

$$a(t ; \ u,v) = \int_{\Omega_t} \left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij} \, D_j \, u \, D_i \, \bar{v} + \sum_{i=1}^{n} a_i \, D_i \, u . \bar{v} + a_0 \, u \bar{v} \right) dx$$

. *Choix des espaces* $V_h(t)$. *cf.* [2].

On se donne un maillage de pas h_i dans la direction $O\,x_i$ $(i=1,\ldots,n)$ et on définit pour $M = (e_1 \ h_1, \ldots, \ e_n \ h_n)$, $e_i \ \epsilon \ Z$, appartenant au réseau $\mathcal{R}_h$ ainsi construit :

- $\sigma_h\ (M,0)$: le pavé de centre M et côtés parallèles aux axes de longueurs $h_1, \ldots, h_n$.

$$- \sigma_h\ (M,1) = \bigcup_{i=1,n} \sigma_h\ (M \pm \frac{h_i}{2}, 0)$$

$$- \Omega\ (h,t) = \{ M \in R_h \mid \sigma_h\ (M,1) \subset \Omega_t \}, \quad t \in [0T].$$

$$- \Omega_h(t) = \bigcup_{M \in \Omega\ (h,t)} \sigma_h(M,0) ; \quad \text{alors } \Omega_h(t) \subset \Omega_t, \ \forall\ t \in [0T]$$

$$- \delta_i\ u_h\ (x) = (u_h\ (x + \frac{h_i}{2}) - u_h\ (x - \frac{h_i}{2}))/\ h_i, \ i = 1, \ldots, n$$

pour $u_h(x)$ définie presque partout dans un domaine de R^n.

- W_M = fonction caractéristique de $\sigma_h\ (M,0)$

Alors :

$V_h\ (t)$: l'espace des fonctions étagées telles que :

$$u_h(x) = \sum_{M \in \Omega\ (h,t)} u_h(M)\ W_M \quad \text{avec} \quad u_h\ (M) \in C$$

On voit facilement que pour $x \in \Omega_h\ (t)$, $\delta_i\ u_h\ (x)$ est à support dans Ω_t.

Nous munissons $V_h(t)$ de deux produits scalaires :

$$(u_h, v_h)_{V_h(t)} = \int_{\Omega_h(t)} u_h\ \bar{v}_h \ dx.$$

$$(\!(u_h, v_h)\!)_{V_h(t)} = \int_{\Omega_t} [u_h\ \bar{v}_h + \sum_{i=1}^{n} \delta_i\ u_h(x) \cdot \overline{\delta_i\ v_h(x)}\ ]\ dx.$$

• *Choix de* $O_h(t)$: [2], [1] : pour $u \in L^2\ (\Omega_t)$:

$$O_h\ (t)\ u = \frac{1}{h_1 \cdot \ldots \cdot h_n} \sum_{M \in \Omega\ (h,t)} \left(\int_{\sigma_h\ (M,0)} u\ (x)\ dx \right) W_M$$

alors :

$$|O_h(t)|_h = 1$$

• *Choix de* $a_h(t\,;\,u_h,\,v_h)$: pour $u_h,\,v_h \in V_h(t)$:

$$a_h(t\,;\,u_h,\,v_h) = \sum_{i,\,j=1}^{n} \int_{\Omega_t} a_{ij}(x,t)\,\delta_j\,u_h(x)\,\delta_i\,\overline{v_h}(x)\,dx +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega_t} a_i(x,t)\,\delta_i\,u_h(x)\,\overline{v_h}(x)\,dx + \int_{\Omega_t} a_0(x,t)\,u_h(x)\,\overline{v_h}(x)\,dx.$$

Comme dans [15] on montre que $\forall\ t \in [0T]$:

$$N(h) \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{h_i} \|a_{ij}\|_{L^\infty(Q_T)} + \|a_j\|_{L^\infty(Q_T)} \right)^2 + \|a_0\|^2_{L^\infty(Q_T)} \right)^{1/2}$$

de partie principale quand $|h| \longrightarrow 0$:

$$\nu(h) = 2\left[\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} \|a_{ij}\|_{L^\infty(Q_T)} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Les autres hypothèses sur $a_h(t\,;\,u_h,\,v_h)$ découlent de celles faites sur a_{ij}, a_i, a_0 •

• *Expression des* $V^p_{h,q}(rk)$: $p \geqslant 0$, $q \leqslant 0$:

Posons :

$$\Omega^p_q(h,t) = \{M \in \mathcal{R}_h \mid \sigma_h(M,1) \subset \Omega_t\ ,\quad \forall\ t \in [(r+q)k,\ (r+p)k\ [\ \}$$

et

$$\Omega^p_{q,h}(t) = \bigcup_{M \in\ \Omega^p_q(h,t)} \sigma_h(M,0)$$

On déduit de la définition de $V_{h,q}^{p}(rk)$ que :

$$V_{h,q}^{p}(rk) \equiv \{u_h \mid u_h(x) = \sum_{M \in \Omega_q^p(h,rk)} u_h(M)\ W_M\ ,\ u_h(M) \in C\ \}$$

• *Construction de* $V_h(\omega)$:

Soit $\omega \supset \Omega_t$, $\forall\ t \in [0T]$, nous définissons :

$$\Omega(h,\omega) = \{M \in \mathcal{R}_h \mid \sigma_h(M,1) \subset \omega\ \}$$

et

$$V_h(\omega) = \{u_h(x) \mid u_h(x) = \sum_{M \in \Omega(h,\omega)} u_h(M)\ W_M\ ,\ u_h(M) \in C\ \}$$

que nous munissons de deux produits scalaires analogues à ceux sur $V_h(t)$, en intégrant cette fois sur ω .

Il est clair que :

$$V_h(t) \subset V_h(\omega)\ , \quad \forall\ t \in [0T]$$

• *Construction des* $\Pi_q^p(rk)$:

Pour $p \geq 0$, $q \leq 0$, on a :

$$V_{h,q}^{p}(rk) \subset V_h(\omega)$$

Soit :

$$u_h = \sum_{M \in \Omega(h,\omega)} u_h(M)\ W_M \in V_h(\omega)$$

Nous posons :

$$\Pi_q^p(rk)\ u_h = \sum_{M \in \Omega_q^p(h,t)} u_h(M)\ W_M \in V_{h,q}^{p}(rk)\ ;\quad t=rk.$$

Les propriétés (III-40), (III-43), (III-44) découlent du choix précédent et des normes sur $V_h(rk)$.

(III-41) et (III-42) sont vraies avec :

$$\epsilon_{p,q}(h,k) = mes\ (\Omega_h(rk) - \Omega^{p}_{h,q}(rk))$$
$$\eta_{p,q}(h,k) = \epsilon_{p,q}(h,k)$$

Le problème P_{hk} admet alors une solution unique.

.*Stabilité du problème* P_{hk}

Nous prenons :

. $F(t) = (L^2(\Omega_t))^{n+1}$

Pour $U = (u, u_1, \ldots, u_n) \in F(t)$: $\Pi\, r(t)\, U = u \in L^2(\Omega_t)$

. $p'_h(t)\, u_h = (u_h, \delta_1 u_h, \ldots, \delta_n u_h) \in F(t), \quad \forall\, u_h \in V_h(t)$

Nous munissons $F(t)$ de la norme :

$$\| u \|^2_{F(t)} = \int_{\Omega_t} \left[|u|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_i|^2_{L^2(\Omega_t)} \right] dx.$$

L'hypothèse (III-62) sera vérifiée si nous supposons que : $t \longrightarrow \underset{x}{mes}\ \Omega_t$ est une fonction mesurable sur $[0T]$ ce qui découle des hypothèses faites sur Q.

. $q_h(t)\, u_h = u_h$ pour $u_h \in V_h(t)$

Alors dans (III-63), (III-64), nous avons :

$$\| P_h(t) \| = 1, \qquad |q_h(t)| = 1, \qquad \forall\, t \in [0T]$$

On est en mesure d'appliquer le théorème de stabilité *III*-8 :

si $\theta \geq \frac{1}{2}$: la solution u_{hk} de P_h est $L^\infty(0T\,;\, L^2(\Omega_t))$ - stable quels que soient h et k.

si $\theta > \frac{1}{2}$: une condition suffisante de stabilité est que :

$$(III\text{-}78) \qquad k \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i} \| a_{ij} \|_{L^\infty(Q_T)} \right)^2 \leq \frac{\alpha}{2} \frac{1}{1-2\theta} (1-\delta')$$

pour $|h|$ assez petit. $\qquad \delta' > 0$ arbitraire.

. *Convergence faible de u_{hk} vers u solution du problème initial.*

. *Choix de $r_h(t)$* :

Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega_t)$; nous posons :

$$r_h(t)\, v = \sum_{M \in \Omega_0^1(h,t)} u_h(M)\, W_M \in V_{h,0}^1(t) \quad \text{par définition,}$$

alors: $\qquad r_h(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{D}(\Omega_t);\ V_{h,0}^1(t))$

. *Choix de $\bar{\omega}(t)$* $\in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega_t);\ F(t))$

$\forall u \in H_0^1(\Omega_t)$; posons :

$$\bar{\omega}(t)\, u = (u,\ D_1 u,\ \ldots,\ D_n u) \in (L^2(\Omega_t))^{n+1} = F(t)$$

Vérifions maintenant les hypothèses du théorème *III*-9 de convergence faible.

• *Hypothèse (III-69)*: Pour h et k assez petits et $t \in [0T[$:

$$\int_{\Omega_t} \delta_l \left(\Pi_0^1(t)\, \tilde{u}_{hk}(t) \right) \bar{v} \; dx = \int_{\Omega_t} \delta_l \, u_{hk}(t) \, \bar{v} \; dx$$

$$= - \int_{\Omega_t} u_{hk}(t) \; \overline{\delta_l \; v} \; dx \quad , \qquad \forall \; v \; \in \; \mathcal{D}(Q_T)$$

D'où :

$$\int_0^T \left(\int_{\Omega_t} \delta_l (\Pi_0^1(t)\, \tilde{u}_{hk}(t))\, \bar{v}\,(x,t) \; dx \right) dt = -\int_0^T \left(\int_{\Omega_t} u_{hk}(t) \; \overline{\delta_l \; v}(x,t) \; dx \right) dt$$

De (*III-66*) on déduit que l'intégrale du premier membre converge vers :

$$\int_0^T \int_{\Omega_t} u_l \; \bar{v} \; dx \; dt \quad \text{quand} \quad |h| \quad \text{et} \quad k \longrightarrow 0 \; ;$$

et comme $\delta_l \, v(x,t) \longrightarrow D_l \, v = \dfrac{\partial v}{\partial x_l}$ dans $L^2(0T \; ; \; L^2(\Omega_t))$ fort

quand $|h| \longrightarrow 0$, l'intégrale du second membre tend vers :

$$-\int_0^T \int_{\Omega_t} u \; \overline{D_l \; v} \; dx \; dt$$

soit à la limite :

$$\int_{Q'_T} u_l \,(x,t) \cdot \bar{v}\,(x,t) \; dx \; dt = - \int_{Q_T} u\,(x,t) \; D_l \; \bar{v} \;\; (x,t) \; dx \; dt$$

$$= \int_{Q_T} D_l \; u\,(x,t) \; \bar{v}\,(x,t) \; dx \; dt$$

d'où : $u_l = D_l \; u$ dans $L^2(Q_T)$

et $u \in L^2(0T \; ; \; H_0^1(\Omega_t))$ avec $U = \bar{\omega} \; u$

. *Hypothèse (III-70)*

D'après le choix de $r_h(t)$ il est clair que, pour $v \in \mathcal{D}(\overline{Q_T})$

$$p_h(t)\,\Psi_{hk}(t) = \sum_{r=0}^{m_k-1} p_h(t)\, r_h(rk)\, v(x,rk)\, W_r(t) \longrightarrow v(x,t) \quad \text{dans}$$

$L^2(0T\,;\,F(t))$ fort, quand $|h|$ et k tendent vers zéro.

D'autre part :

$p_h(t)\,\Pi_0^1(t)\,\tilde{u}_{hk}(t) \longrightarrow U = \bar{\omega}\,u$ dans $L^2(0T\,;\,F(t))$ faible.

L'hypothèse (*III-70*) suit immédiatement de la définition de $a_h(t\,;\,u_h,v_h)$

. *Hypothèse (III-71)*

Démonstration analogue en remarquant que :

$$\bar{\nabla}_k\,\Psi_{hk}(t) \longrightarrow \frac{\partial v}{\partial t} \quad \text{dans} \quad L^2(Q_T) \text{ fort.}$$

. *Hypothèses (III-72), (III-73)* même démonstration que dans [15].

On a alors le :

.*Résultat III-9* Quand $|h|$ et k tendent vers zéro :

si $\theta \geqslant \frac{1}{2}$ $\quad q_h(t)\,u_{hk}(t) \rightharpoonup u$ dans $L^\infty(0T\,;\,L^2(\Omega_t))$ faible

si $\theta < \frac{1}{2}$ $\quad q_h(t)\,u_{hk}(t) \rightharpoonup u$ dans $L^\infty(0T\,:\,L^2(\Omega t))$ faible

si h et k vérifient l'inégalité (*III-78*).

où u est la solution du problème initial V_1.

.III-5 *Régularisation elliptique* :

Lors de la résolution numérique du problème approché P_{hk} par la méthode variationnelle des différences finies décrite au § *III-4*, on constate un phénomène de propagation des erreurs au voisinage de la frontière latérale Γ' du domaine de résolution Q au fur et à mesure que le temps t augmente dans un intervalle $[0,T_1]$, et une erreur sensiblement uniforme pour $t > t_1$.

Afin d'obtenir une approximation uniforme de la solution au voisinage de Γ' pour tout $t > 0$, on va remplacer le problème initial V (équation *III-20*)) de type parabolique par un problème de type elliptique résolu dans un domaine $Q_T = Q \cap \{0 < t < T\}$ pour T fixé positif, dont la solution approchera la solution u du problème V en un certain sens.

Nous donnerons ainsi deux procédés de régularisation elliptique avec leurs démonstrations de convergence. Nous conservons les hypothèses et notations des paragraphes précédents avec en plus :

(*III-79*) $$u_0(x) \equiv 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0$$

On peut toujours s'y ramener en construisant une fonction w de $\mathcal{B}(Q_T)$ telle que $w(\cdot,0) = u_0$ dans $L^2(\Omega_0)$ et en posant $v = u - w$.

.III-5-1 *Premier procédé de régularisation elliptique* :

Fixons nous une limite de temps T et considérons pour $\epsilon > 0$ le :

Problème P_ϵ (*formel*) : Déterminer u_ϵ "*assez régulière*" telle que :

$$-\epsilon \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + A(t)\, u_\epsilon = f \quad \text{dans} \quad Q_T = Q \cap \{0 < t < T\}$$

$$\gamma_j\, u_\epsilon\,(x,t) = 0 \text{ sur } \Gamma'_T \text{ frontière latérale de } Q_T,\ j=0,\dots,m-1$$

$$u_\epsilon\,(\cdot, T) = 0 \text{ sur } \Omega_T$$

$$u_\epsilon\,(\cdot, 0) - \epsilon \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t}\,(\cdot,0) = 0 \text{ sur } \Omega_0$$

On vérifie facilement l'équivalence formelle du problème P_ε avec le problème variationnel suivant :

Problème Q_ε : Déterminer $u_\varepsilon \in W$ telle que :

$$(III\text{-}80) \quad b_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \varepsilon (u'_\varepsilon, v') - (u_\varepsilon, v') + a_T(u_\varepsilon, v) = (f, v)$$

pour tout $v \in W$ où :

$$W = \{ w \mid w \in H_0^{m,0}(Q_T),\ w' \in L^2(Q_T),\ w(\cdot, T) = 0 \text{ sur } \Omega_T \}$$

W est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$|||u|||_W^2 = \| u \|^2_{H^{m,0}(Q_T)} + |u'|^2_{L^2(Q_T)}$$

Notation : $(\ ,\ )$ désigne ici le produit scalaire dans $L^2(Q_T)$.

Le problème Q_ε est un problème elliptique et nous avons le :

Résultat III-10. Sous les hypothèses H_1, H'_2, H_3, H_4 et H_5, le problème Q_ε admet une solution unique pour tout ε positif fixé.

Démonstration :

Vérifions la coercivité de la forme $b_\varepsilon(u,v)$. Pour tout $v \in W$, on a:

$$2\,Re\ b_\varepsilon(v,v) = 2\varepsilon |v'|^2_{L^2(Q_T)} + |v(0)|^2_{L^2(\Omega_0)} + 2\,Re\ a_T(v,v)$$

soit :

$$2\,Re\ b_\varepsilon(v,v) \geq 2\varepsilon |v'|^2_{L^2(Q_T)} + |v(0)|^2_{L^2(\Omega_0)} + 2\alpha \| v \|^2_{H^{m,0}(Q_T)}$$

$$2\,Re\ b_\varepsilon(v,v) \geq 2\,inf(\varepsilon, \alpha)\ |||v|||^2_W.$$

L'approximation est justifiée par le :

Théorème III-10 Quand $\epsilon \longrightarrow 0$:

(III-81) $u_\epsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^{m,0}(Q_T)$ faible

(III-82) $\sqrt{\epsilon}\ u'_\epsilon \rightharpoonup w$ dans $L^2(Q_T)$ faible avec $w \in L^2(Q_T)$

(III-83) $u_\epsilon(0) \rightharpoonup 0$ dans $L^2(\Omega_0)$ faible

où u est la solution du problème initial V

Démonstration :

De la coercivité de $b_\epsilon(v,v)$ il vient pour $v=u_\epsilon \in W$:

$$2\,|\sqrt{\epsilon}\ u'_\epsilon|^2_{L^2(Q_T)} + |u_\epsilon(0)|^2_{L^2(\Omega_0)} + \alpha\,\|u_\epsilon\|^2_{H^{m,0}(Q_T)} \leq 2\,Re\,b_\epsilon(u_\epsilon,u_\epsilon)$$

et d'après (III-80) :

$$2\,Re\,b_\epsilon(u_\epsilon,u_\epsilon) = 2\,Re\,(f,u_\epsilon) \leq 2\,|f|_{L^2(Q_T)}\,|u_\epsilon|_{L^2(Q_T)}$$

Il s'ensuit que :

(1) u_ϵ reste dans un borné de $H_0^{m,0}(Q_T)$

(2) $\sqrt{\epsilon}\ u_\epsilon$ reste dans un borné de $L^2(Q_T)$

(3) $u_\epsilon(\cdot,0)$ reste dans un borné de $L^2(\Omega_0)$

De (1), (2), (3) on déduit que de toute suite ϵ tendant vers 0 on peut extraire une sous-suite $\eta \longrightarrow 0$ telle que :

(4) $u\eta \rightharpoonup u$ dans $H_0^{m,0}(Q_T)$ faible avec $u \in H_0^{m,0}(Q_T)$

(5) $\sqrt{\eta}\ u\eta \rightharpoonup w$ dans $L^2(Q_T)$ faible avec $w \in L^2(Q_T)$

(6) $u\eta(\cdot,0) \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(\Omega_0)$ faible avec $\theta \in L^2(\Omega_0)$.

Prenons maintenant $\epsilon = \eta$ dans (III-80) nous avons :

$$\sqrt{\eta}\ (\sqrt{\eta}\ u\eta, v') - (u\eta, v') + a_T(u\eta, v) = (f,v), \quad \forall\, v \in W$$

et quand $\eta \longrightarrow 0$ il vient d'après (4), (5) et (6) :

$$(7) \quad -(u,v') + a_T(u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in W.$$

mais : $W = \{w \mid w \in H_0^{m,0}(Q_T)\ ,\ w' \in L^2(Q_T),\ w(\cdot,T) = 0\}$ est dense dans $B_T(Q_T)$ où, rappelons le :

$$B_T(Q_T) = \{w \mid w \in H_0^{m,0}(Q_T),\ w' \in F'(Q_T),\ w(\cdot,T) = 0\}$$

On en déduit que (7) est vraie pour tout $v \in B_T(Q_T)$, c'est à dire que u est solution du problème initial V avec $u(\cdot,0) \equiv 0$.
. La limite dans (4) étant indépendante de la sous-suite $\eta \longrightarrow 0$ la suite entière u_ϵ vérifie (4), (5) et (6) quand $\epsilon \longrightarrow 0$. D'où le théorème

III-5-2 *Deuxième procédé de régularisation elliptique* :

Le problème approché formel s'écrit pour T fixé :

Problème P_ϵ^1 : Déterminer u_ϵ "*assez régulière*" telle que :

$$-\epsilon \frac{\partial^2 u_\epsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} + A(t)\, u_\epsilon = f \quad \text{dans } Q_T$$

$\gamma_j\, u_\epsilon\,(x,t) = 0$ sur Γ_T' frontière latérale de Q_T, $j=0,\ldots,m-1$

$u_\epsilon\,(x,0) = 0$ sur Ω_0

$\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t}(x,T) = 0$ sur Ω_T

Le problème P_ϵ^1 est équivalent formellement au problème variationnel suivant :

Problème $\mathcal{Q}_\varepsilon^1$: Déterminer $u_\varepsilon \in W$ telle que :

(III-84) $b_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \varepsilon (u'_\varepsilon, v') + (u'_\varepsilon, v) + a_T(u_\varepsilon, v) = (f, v)$

pour tout $v \in W$ où :

$$W = \{ v \mid v \in H_0^{m,0}(Q_T),\ v' \in L^2(Q_T),\ v(\cdot,0) = 0 \text{ dans } \Omega_0 \}$$

W est un espace de Hilbert muni de la même norme qu'au § III-5-1.

Résultat III-11. Le problème approché $\mathcal{Q}_\varepsilon^1$ admet une solution unique pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, sous les hypothèses H_1, H'_2, H_3, H_4 et H_5.

Démonstration :

$\mathcal{Q}_\varepsilon^1$ est un problème elliptique. Vérifions la coercivité de la forme $b_\varepsilon(u,v)$; pour tout $v \in W$ on a :

$$2\,Re\, b_\varepsilon(v,v) = 2\varepsilon |v'|^2_{L^2(Q_T)} + |v(T)|^2_{L^2(\Omega_T)} + 2\,Re\, a_T(v,v)$$

d'où

$$2\,Re\, b_\varepsilon(v,v) \geq 2\varepsilon |v'|^2_{L^2(Q_T)} + |v(T)|^2_{L^2(\Omega_T)} + 2\alpha \|v\|^2_{H^{m,0}(Q_T)}$$

$$2\,Re\, b_\varepsilon(v,v) \geq inf(2\varepsilon, 2\alpha) \; |||v|||^2_W$$

Montrons maintenant le :

Théorème III-11 : quand $\varepsilon \longrightarrow 0$

(III-85) $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $H_0^{m,0}(Q_T)$ faible.

(III-86) $\sqrt{\varepsilon}\, u'_\varepsilon \rightharpoonup w$ dans $L^2(Q_T)$ faible avec $w \in L^2(Q_T)$

où u est la solution du problème initial V.

Démonstration :

Point 1 . De la coercivité de la forme $b_\varepsilon(v,v)$ il vient pour $v=u_\varepsilon \in W$:

$$2\,|\sqrt{\varepsilon}\,u'_\varepsilon|^2_{L^2(Q_T)} + |u_\varepsilon(T)|^2_{L^2(Q_T)} + 2\alpha\,\|u_\varepsilon\|^2_{H^{m,0}(Q_T)} \leq 2\,Re\,b_\varepsilon(u_\varepsilon,u_\varepsilon)$$

Mais d'après (*III*-84) :

$$2\,Re\,b_\varepsilon(u_\varepsilon,u_\varepsilon) = 2\,Re\,(f,u_\varepsilon) \leq 2\,|f|_{L^2(Q_T)}\,|u_\varepsilon|_{L^2(Q_T)}$$

On en déduit que u_ε , $\sqrt{\varepsilon}\,u'_\varepsilon$, $u_\varepsilon(\cdot,T)$ restent dans un borné de $H^{m,0}_0(Q_T)$, $L^2(Q_T)$ et $L^2(\Omega_T)$ respectivement, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$. Par conséquent de toute suite $\varepsilon \longrightarrow 0$, on peut extraire une sous-suite $\eta \longrightarrow 0$ telle que :

(1) $u_\eta \rightharpoonup u$ dans $H^{m,0}_0(Q_T)$ faible avec $u \in H^{m,0}_0(Q_T)$

(2) $\sqrt{\eta}\,u'_\eta \rightharpoonup w$ dans $L^2(Q_T)$ faible avec $w \in L^2(Q_T)$

(3) $u_\eta(T) \rightharpoonup \theta$ dans $L^2(\Omega_T)$ faible avec $\theta \in L^2(\Omega_T)$

Point 2 . u est solution du problème initial V

u_η vérifie (*III*-84):

$$\sqrt{\eta}\,(\sqrt{\eta}\,u'_\eta, v') + (u'_\eta,v) + a_T(u_\eta,v) = (f\,v)\,, \quad \forall\, v \in W$$

Mais pour u_η, $v \in W$:

$$(u'_\eta,v) + (u_\eta,v') = (u_\eta(T),\,v(T))_{L^2(\Omega_T)} - (u_\eta(0),\,v(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

D'où, puisque $v(0) = 0$:

$$\sqrt{\eta}\,(\sqrt{\eta}\,u'_\eta,v') + (u_\eta(T),\,v(T))_{L^2(\Omega_T)} - (u_\eta,v') + a_T(u_\eta,v) = (f,v)$$

pour tout $v \in W$.

Quand $\eta \longrightarrow 0$ il vient d'après (1), (2), (3) :

(4) $(\theta, v(T))_{L^2(\Omega_T)} - (u,v') + a_T(u,v) = (f,v), \quad \forall\, v \in W$

Prenons $v \in \mathcal{D}(Q_T)$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact dans l'ouvert Q_T. De (4) il suit :

$$u' + A\,u = f \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(Q_T)$$

où : $$a_T(u,v) = \langle A\,u,\, v \rangle, \quad \forall\, v \in \mathcal{D}(Q_T);\ A\,u \in \mathcal{D}'(Q_T)$$

Mais $\mathcal{D}(Q_T)$ étant dense dans $F(Q_T) = H_0^{m,0}(Q_T)$, on a :

$\langle A\,u,\, v \rangle = a_T(u,v), \quad \forall\, v \in F(Q_T)$ avec $A\,u \in F'(Q_T)$.

Par suite $u' = f - A\,u$ appartient à $F'(Q_T)$ et :

(5) $$u' + A\,u = f \quad \text{dans} \quad F'(Q_T).$$

Il ne reste plus qu'à montrer $u(.,0) \equiv 0$ dans $L^2(\Omega_0)$ pour que u soit solution du problème initial V.

Nous savons que $u \in F(Q_T)$ et $u' \in F'(Q_T)$ c'est à dire $u \in \mathcal{B}(Q_T)$. Or d'après [11] une condition nécessaire et suffisante pour que $u(.,0) = 0$ dans $L^2(\Omega_0)$ est que :

(6) $$\langle u', v \rangle + \langle u, v' \rangle = 0 \qquad \forall\, v \in B_T(Q_T)$$

$\langle\ ,\ \rangle$ désignant la dualité entre $F(Q_T)$ et son dual.

Mais $\forall\, v \in B_T(Q_T)$:

$$\langle u'\eta, v \rangle + \langle u\eta, v' \rangle = -(u\eta(0),\, v(0))_{L^2(\Omega_0)} = 0 \quad \text{car} \quad u\eta \in W.$$

soit :

(7) $$\langle u'\eta, v \rangle + \langle u\eta, v' \rangle = 0 \quad \forall\, v \in B_T(Q_T).$$

Nous démontrons plus loin le :

lemme III-2 quand $\eta \longrightarrow 0$, $u'_\eta \longrightarrow u'$ dans $F'(Q_T)$ faible.

Alors quand $\eta \longrightarrow 0$, (7) devient d'après (1) et le *lemme III-2* :

$$\langle u' v \rangle + \langle u, v' \rangle = 0 \quad \forall\, v \in B_T(Q_T)$$

ce qui est (6).

D'où le théorème, la limite dans (1) étant indépendante de la sous-suite $\eta \longrightarrow 0$ extraite de $\epsilon \longrightarrow 0$.

Démonstration du lemme III-2 :

1er point $\dfrac{\partial u_\epsilon}{\partial t}$ est borné dans $F'(Q_T)$ pour tout $\epsilon > 0$.

1 - Soient :

- $\mathcal{O}$ un ouvert de R^n_x, et $t_0, t_1 \in\ ]0, T[$ tels que : $\mathcal{O} \times [t_0, t_1] \subset \dot{Q}_T$
- $\varphi(x,t) = \Psi(t) \otimes v(x)$ avec $\begin{cases} \Psi(t) \in \mathcal{D}(]t_0, t_1[) \\ v(x) \in H^m_0(\mathcal{O}) \end{cases}$

Posons :

$$a(t\,;\, x\,;\, u,\, v) = \sum_{|p|,|q| \le m} a_{pq} D_p u\, D_q \bar{v}\,, \qquad \forall\, u,\, v \in F(Q_T)$$

alors :

$$a(t\,;\, u,v) = \int_{\mathcal{O}_t} a(t\,;\, x\,;\, u,v)\, dx \qquad p.p \text{ en } t \in [0T]$$

$$a_T(u,v) = \int_0^T a(t\,;\, u,v)\, dt$$

Soit $\tilde{\varphi}$ le prolongement par zéro de $\varphi(x,t)$ en dehors de $\bar{\mathcal{O}} \times [t_0, t_1]$;

alors $\tilde{\varphi} \in W$ et en prenant $v = \tilde{\varphi}$ dans (III-84) il vient :

$$\int_{t_0}^{t_1}\Big[\int_{\mathcal{O}} \epsilon\ u'_\epsilon\ \bar{v}\ dx\,.\,\Psi(t) + \int_{\mathcal{O}} u'_\epsilon\ \bar{v}\ dx\,.\,\Psi(t) + \int_{\mathcal{O}} a(t;x;u_\epsilon,v)\ dx\,.\,\Psi(t)\Big]dt$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\Big[\int_{\mathcal{O}} f(t)\ \bar{v}\ dx\,.\,\Psi(t)\Big]\ dt$$

D'où :

(8) $-\epsilon\ u''_\epsilon + u'_\epsilon + A(t)\,u_\epsilon = f$ dans $\mathcal{D}'(]t_0, t_1[)$ à valeurs dans $H^{-m}(\mathcal{O})$, avec :

$$a(t\,;\,u_\epsilon\,,v) = (A(t)\,u_\epsilon\,,\,v) \qquad \forall\, v \in H_0^m(\mathcal{O})$$

où : $A(t) \in \mathcal{L}(H_0^m(\mathcal{O}),\, H^{-m}(\mathcal{O}))$

Posons : $g(t) = f(t) - A(t)\,u_\epsilon = -\epsilon\ u''_\epsilon + u'_\epsilon$ dans $\mathcal{D}'(]t_0,t_1[\longrightarrow H^{-m}(\mathcal{O}))$

$u_\epsilon \in L^2(t_0,t_1\,;\,H^m(\mathcal{O}))$ entraine : $A(t)\,u_\epsilon \in L^2(t_0,t_1\,;\,H^{-m}(\mathcal{O}))$

et comme $f(t) \in L^2(t_0,t_1\,;\,H^{-m}(\mathcal{O}))$ on en déduit que :

$$g(t) = -\epsilon\ u''_\epsilon + u'_\epsilon \in L^2(t_0,t_1\,;\,H^{-m}(\mathcal{O}))$$

<u>2- *Montrons que $g(t)$ est bornée dans $L^2(t_0,t_1\,;\,H^{-m}(\mathcal{O}))$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$* :</u>

$$g(t) = f(t) - A(t)\ u_\epsilon$$

Il suffit de voir que $A(t)\,u_\epsilon$ est borné dans $L^2(t_0,t_1\,;\,H^{-m}(\mathcal{O}))$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$. Mais u_ϵ, bornée dans $H_0^{m,0}(Q_T)$, l'est aussi dans $L^2(t_0,t_1\,;\,H_0^m(\mathcal{O}))$ et comme $A(t) \in \mathcal{L}(H_0^m(\mathcal{O}),\, H^{-m}(\mathcal{O}))$, $A(t)\,u_\epsilon$ est borné dans $L^2(t_0,t_1\,;\,H^{-m}(\mathcal{O}))$.

3- Montrons maintenant que quel que soit le domaine cylindrique $\mathcal{O} \times]\tau_0,\tau_1[$, avec $\mathcal{O}$ ouvert régulier de R^n_x et $\overline{\mathcal{O}} \times [\tau_0,\tau_1] \subset \overline{Q}_T$ et $\tau_0 \geq 0$, $\tau_1 < T$, $\frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} = u'_\epsilon$ reste dans un borné de $L^2(\tau_0,\tau_1 ; H^{-m}(\mathcal{O}))$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$.

Pour cela nous prenons : $\begin{cases} t_0 = \tau_0 \\ \tau_1 < t_1 < T \end{cases}$ tels que : $\overline{\mathcal{O}} \times [t_0,t_1] \subset Q_T$

et nous construisons une fonction $r(t) \in \mathcal{D}^1([t_0,t_1])$ telle que :

$r(t) = 1$ si $t_0 \leq t \leq \tau_1$, $r(t) = 0$ au voisinage $t = t_1$

Posons : $v_\epsilon = r(t)\ u'_\epsilon$

Il vient : $-\epsilon\ v'_\epsilon + v_\epsilon = g(t)\ r(t) - \sqrt{\epsilon}\ u'_\epsilon \cdot r'(t)\ \sqrt{\epsilon} = g_1(t)$

quand $\epsilon \longrightarrow 0$: $\begin{cases} \cdot\ g(t)\ r(t) \text{ reste dans un borné de } L^2(t_0,t_1 ; H^{-m}(\mathcal{O})) \\ \cdot\ \sqrt{\epsilon}\ u'_\epsilon \text{ reste borné dans } L^2(Q_T) \text{ d'après (2)} \end{cases}$

donc $g_1(t) = -\epsilon\ v'_\epsilon + v_\epsilon$ reste borné dans $L^2(t_0,t_1 ; H^{-m}(\mathcal{O}))$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$.

Définissons : $E_\epsilon(t) = \{ \frac{1}{\epsilon}\ e^{t/\epsilon}$ pour $t < 0$, 0 pour $t > 0 \}$

Alors : $v_\epsilon = E_\epsilon * g_1(t)$ dans $L^2(t_0,t_1 ; H^{-m}(\mathcal{O}))$

où $*$ désigne le produit de convolution en t.

De $\int_{-\infty}^{+\infty} |E_\epsilon(t)|\ dt = 1$ il suit :

$$\| v_\epsilon \|_{L^2(t_0,t_1 ; H^{-m}(\mathcal{O}))} \leq \| g_1 \|_{L^2(t_0,t_1 ; H^{-m}(\mathcal{O}))}$$

et par conséquent v_ϵ reste dans un borné de $L^2(t_0,t_1 ; H^{-m}(\mathcal{O}))$; en prenant la restriction de v_ϵ à $[\tau_0,\tau_1]$, u'_ϵ est alors bornée dans $L^2(\tau_0,\tau_1 ; H^{-m}(\mathcal{O}))$ quand $\epsilon \longrightarrow 0$.

4- On en déduit que quelque soit le compact $K \subset Q_T$, $u'_\epsilon \in L^2(0T ; H^{-1}(Kt))$, où $Kt_0 = K \cap \{t = t_0\}$, et est bornée dans cet espace. En prenant une suite de compacts Kn telle que $\cup K_n$ tende vers Q_T on en conclut que $u'_\epsilon \in L^2(0T ; H^{-m}(\Omega_t)) \equiv F'(Q_T)$ et est bornée dans cet espace, ce qui démontre le point 1.

Point 2 : quand $\epsilon \longrightarrow 0$ on peut extraire une sous suite $\eta \longrightarrow 0$ vérifiant (1), (2), (3) et :

$$u'\eta \rightharpoonup u' \quad \text{dans} \quad F'(Q_T) \text{ faible.}$$

D'après le point 1 on peut extraire une sous-suite $\eta \longrightarrow 0$ vérifiant au sens de la convergence faible :

(1) $u\eta \rightharpoonup u$ dans $H_0^{m,0}(Q_T)$

(2) $\sqrt{\eta}\, u\eta \rightharpoonup w$ dans $L^2(Q_T)$

(9) $u'\eta \rightharpoonup \mu$ dans $F'(Q_T)$ où $\mu \in F'(Q_T)$

En prenant $\epsilon = \eta$ dans (III-84) il vient quand $\eta \longrightarrow 0$:

$$\langle \mu, v \rangle + a_T(u,v) = (f,v), \qquad \forall\, v \in W$$

d'où l'on déduit :

$$\mu + Au = f \quad \text{dans} \quad F'(Q_T)$$

et en comparant à (5) on a : $\mu = u'$. D'où le lemme.

CHAPITRE *IV*

EQUATIONS LINEAIRES DU SECOND ORDRE EN t

I - INTRODUCTION

Nous considérons dans ce chapitre des problèmes aux limites d'évolution du second ordre en t du type :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} + \dfrac{d}{dt}\left(B(t)\,u(t)\right) + \mathcal{A}(t)\,u(t) = f(t) \quad , \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{pour} \quad t = 0 \\ \dfrac{du}{dt}(x,0) = u_1(x) \qquad \text{pour} \quad t = 0 \end{cases}$$

où $\mathcal{A}(t)$ est un opérateur linéaire non borné supposé pour simplifier auto-adjoint, $B(t)$ un opérateur linéaire continu convenable et où (x,t) appartient à un domaine cylindrique $\Omega \times]0T[$ ou bien non cylindrique : $(\Omega(t) \ , \ t > 0)$.

Dans un premier stade nous construisons le problème variationnel associé à (1) dont nous donnerons une approximation par la méthode du domaine auxiliaire pour des conditions aux limites homogènes. Nous nous limiterons à des opérateurs $\mathcal{A}(t)$ d'ordre deux, la généralisation à l'ordre $2m$ ne présentant pas de difficultés.

Puis nous formulerons le problème variationnel associé à (1) dans un domaine non cylindrique. Nous en donnerons, comme au chapitre *III*, trois procédés d'approximation : par la méthode du domaine auxiliaire qui nous

ramènera à un problème cylindrique, par la méthode de Galerkin généralisée, et par la méthode variationnelle des différences finies analogue à ce qui a été fait dans *RAVIART* [15] pour le cas cylindrique.

II- *EQUATIONS D'EVOLUTION LINEAIRES DU SECOND ORDRE EN t DANS UN DOMAINE CYLINDRIQUE*

II-1 *Le problème initial variationnel*

Nous l'introduisons sous sa forme la plus générale. Nous nous donnons:

- V et H : deux espaces de Hilbert séparables avec $V \subset H$ algébriquement et topologiquement, V dense dans H.
- $a(t\,;\,u,v)$: une famille de formes sesquilinéaires continues sur $V \times V$ pour tout $t \in [0,T]$, T positif fini arbitraire.
- $B(t)$: un opérateur linéaire continu de H dans H.
- $f(t) \in L^2(0T\,;\,H)$
- $u_0 \in V$ et $u_1 \in H$.

Nous faisons les hypothèses suivantes :

(*IV-1*) $t \longrightarrow a(t\,;\,u,v)$ est une fois continûment différentiable sur $[0,T]$ pour tout $u, v \in V$.

(*IV-2*) $|a(t\,;\,u,v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$, $\forall\ u, v \in V$. M indépendant de $t \in [0,T]$

(*IV-3*) $a(t\,;\,u,v) = \overline{a(t\,;\,v,u)}$, $\forall\ u, v \in V$, $\forall\ t \in [0T]$.

(*IV-4*) Il existe $\lambda \geq 0$ et $\alpha > 0$ tels que :

$$a(t\,;\,v,v) + \lambda |v|_H^2 \geq \alpha \|v\|_V^2 \ , \ \forall\ v \in V.$$

(IV-5) $B(t)$ est hermitien dans H

(IV-6) $t \longrightarrow (B(t)\, u, v)_H$ est une fois continûment différentiable sur $[0,T]$, $\forall\, u,\, v \in H$.

Nous posons le :

Problème P : Déterminer u telle que : $\begin{cases} u \in L^\infty(0T\,;\, V) \text{ et :} \\ u' \in L^\infty(0T\,;\, H) \end{cases}$

$$(IV\text{-}7) \quad \int_0^T \left[a(t\,;\, u(t)\,,\, v(t)) - (u'(t), v'(t)) + (\!(B(t)\, u(t))\!)', v(t)) \right] dt$$

$$= \int_0^T (f(t),\, v(t))\, dt + (u_1,\, v(0))$$

$\forall\, v \in \Phi$, $\quad = \{\, v \mid v \in L^2(0T\,;\, V),\ v' \in L^2(0T\,;\, H),\ v(T) = 0 \,\}$

$$(IV\text{-}8) \quad u(0) = u_0$$

où $(\ ,\ )$, $(\!(\ ,\ )\!)$ désignent les produits scalaires dans H et V respectivement.

Nous avons le résultat suivant : *cf* [10], [7]

Résultat IV-1 : Sous les hypothèses (IV-1)...(IV-6) le problème P admet une solution unique ; de plus :

- $u'' \in L^2(0T\,;\, V')$ où V' est l'anti-dual topologique de V.
- $u = u^*$ (presque partout) fonction continue de $[0T] \longrightarrow H$ avec :
  - $u^*(0) = u_0$; $u^*(t) \in V$ pour tout $t \in [0,T]$
  - $\dfrac{du^*}{dt}$ est continue de $[0T] \longrightarrow V'$ telle que :
    $\dfrac{du^*}{dt}(t) \in H$ pour tout $t \in [0T]$ et $\dfrac{du^*}{dt}(0) = u_1$

Interprétation du problème P :

u vérifie dans $L^2(0T\,;\,V')$:

$$(IV\text{-}9)\qquad u''(t) + (B(t)\,u(t))' + A(t)\,u(t) = f(t)$$

où $A(t)$ est l'opérateur non borné associé à $a(t\,;\,u,v)$, les dérivées étant prises au sens des distributions sur $]0T[$.

Soit maintenant Ω un ouvert borné de R^n, de frontière Γ. Nous allons construire les problèmes (P) correspondant aux problèmes de DIRICHLET, NEUMANN et mêlés, dans le cas où $A(t)$ est un opérateur différentiel self-adjoint d'ordre deux.

Nous prenons :

- $H = L^2(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega) \subset V \subset H^1(\Omega)$, V fermé dans $H^1(\Omega)$.
- $$a(t\,;\,u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} D_j u \; D_i \bar{v} \; dx + \int_\Omega a_0 \, u \, \bar{v} \; dx$$

pour tout $u, v \in H^1(\Omega)$, il lui est associé l'opérateur $A(t)$:

$$(IV\text{-}10)\qquad A(t) = -\sum_{i,j=1}^{n} D_j \, (a_{ij}(t)\, D_i) + a_0(t)$$

Nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèses H :

H_0 : $a_{ij}(x,t)$, $a_0(x,t) \in L^\infty(\Omega \times]0T[)$, $\forall\ T$ fini positif

H_1 : $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$, $a_0 = \overline{a_0}$

H_2 : $t \longrightarrow a_{ij}(x,t)$, $t \longrightarrow a_0(x,t)$
sont une fois continûment différentiables sur $[0T]$, $\forall\ x \in \Omega$.

H_3 : Il existe $\alpha > 0$ tel que :

$$Re \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\, \xi_j \bar{\xi}_i \geq \alpha \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2, \quad \forall\ \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in C^n$$

et $\forall\ (x,t) \in \Omega \times]0T[$.

H_4 : $f \in L^2(]0T[\times \Omega)$

H_5 : $u_0 \in V$, $u_1 \in L^2(\Omega)$

H_6 : $B(t) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$, hermitien dans $L^2(\Omega)$ et :

H_7 : $t \longrightarrow (B(t)\, u, v)_{L^2(\Omega)} \in \mathcal{C}^1[0T]$, $\forall\ u, v \in L^2(\Omega)$.

Du résultat *IV-1* nous déduisons immédiatement le

Résultat IV-2 Sous les hypothèses H le problème (P) associé à l'opérateur *(IV-10)* admet une solution unique.

Nous prendrons successivement :

• $V = H_0^1(\Omega)$: d'où $u(t) = 0$ sur Γ ; (P) est alors le problème de DIRICHLET

• $V = H^1(\Omega)$: nous avons formellement : $\dfrac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = 0$ sur Γ où :

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j u \cos(\vec{n}, x_i)$$

$\vec{n}$: normale extérieure à Ω

(P) est alors le problème de NEUMANN.

• $V = V_0 = \{v \mid v \in H^1(\Omega),\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \subset \Gamma, \Gamma_1 \text{ de capacité positive}\}$

u sera solution d'un problème mêlé,

$$u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu_{A(t)}} = 0 \text{ sur } \Gamma_2 \quad \text{avec} \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

II-2 Problème approché (P_ϵ) par la méthode du domaine auxiliaire pour le problème de DIRICHLET;

Dans ce cas $V = H_0^1(\Omega)$ et la solution u du problème (P) associé à l'opérateur $A(t)$ donné en *(IV-10)* vérifie :

$$u''(t) + (B(t)\, u(t))' + A(t)\, u(t) = f(t) \quad \text{dans } L^2(0T; H^{-1}(\Omega))$$

$$u \in L^\infty(0T; H_0^1(\Omega)),\ u' \in L^\infty(0T; L^2(\Omega)),\ u'' \in L^2(0T; H^{-1}(\Omega))$$

Domaine de résolution de P_ε : D

Soit Ω_1 un ouvert (borné ou non) contenu dans $\complement \bar{\Omega}$, et D = intérieur de $\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1$ le domaine complété. Ω_1 est appelé "*domaine auxiliaire*".

Approchons le problème (P) par un problème de DIRICHLET dans $D \times]0T[$. Posons :

$$(IV\text{-}11)\quad A_\varepsilon(t\,;\,u,v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_D A_{ij}\, D_j u\, D_i \bar{v}\, dx + \int_D A_0\, u\, \bar{v}\, dx\,, \quad \forall\, u, v \in H_0^1(D)$$

Choix de A_{ij}, A_0 :

$$(IV\text{-}12)\qquad A_{ij} = \left\{ a_{ij}(x,t) \text{ dans } \Omega \times]0T[,\ \frac{1}{\varepsilon}\,\delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \times]0T[\right\}$$

$$A_0 = \left\{ a_0(x,t) \text{ dans } \Omega \times]0T[,\ \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } \Omega_1 \times]0T[\right\}$$

Nous posons :

$$(IV\text{-}13)\quad B_\varepsilon(t)\, f(x,t) = B(t)\,[f|_{\Omega \times [0T]}] + \frac{1}{\varepsilon}\, f(x,t)|_{\Omega_1 \times [0T]}, \forall\, f \in L^2(D)$$

$$(IV\text{-}14)\quad \tilde{f}(x,t) = \left\{ f(x,t) \text{ dans } \Omega \times]0T[\,,\ 0 \text{ en dehors} \right\}$$

$$(IV\text{-}15)\quad \tilde{u}_i(x) = \left\{ u_i(x) \text{ dans } \Omega\,,\ 0 \text{ en dehors} \right\},\ i = 0,1$$

Problème approché (P_ε) : Déterminer u_ε telle que :

$$u_\varepsilon \in L^\infty(0T\,;\,H_0^1(D))\,,\quad u'_\varepsilon \in L^\infty(0T\,;\,L^2(D)) \quad \text{avec :}$$

$$\cdot\,;\, u_\epsilon(t), \varphi(t)) \;+\; (\!(B_\epsilon(t)\, u_\epsilon(t))', \varphi(t))_{L^2(D)}$$

$$- (u'_\epsilon(t), \varphi'(t))_{L^2(D)} \;]\; dt$$

$$= \int_0^T (\tilde{f}(t), \varphi(t))_{L^2(D)}\; dt \;+ (\tilde{u}_1\,, \varphi(0))_{L^2(D)}$$

$$\forall\, \varphi \in \Phi(D) = \{ \varphi \mid \varphi \in L^2(0T;\, H_0^1(D)),\ \varphi' \in L^2(]0T[\times D),\ \varphi(T) = 0 \}$$

$$(IV\text{-}17) \qquad u_\epsilon(0) = \tilde{u}_0$$

Du résultat *IV-1* nous déduisons facilement le :

Résultat IV-3 : Sous les hypothèses H le problème de Dirichlet (P_ϵ) admet une solution unique pour tout $\epsilon > 0$ fixé.

Notre construction est justifiée par le théorème de convergence suivant :

Théorème IV-1 : quand $\epsilon \longrightarrow 0$,

$$u_\epsilon \,|_{\Omega \times\,]0T[} \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T;\, H^1(\Omega)) \quad \text{faible.}$$

$$u'_\epsilon \,|_{\Omega \times\,]0T[} \longrightarrow u' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T;\, L^2(\Omega)) \quad \text{faible.}$$

où u et u_ϵ sont les solutions de (P) et (P_ϵ) respectivement.

Démonstration :

Nous n'en donnerons que les points principaux, le reste se vérifiant facilement.

Point 1 : Pour tout $\epsilon > 0$ on a :

$$(IV\text{-}18) \qquad \max_{t \in [0T]} \| u_\epsilon(t) \|_{H^1(D)} \leq K_1 \;,\; \max_{t \in [0T]} |u'_\epsilon(t)|_{L^2(D)} \leq K_2$$

$$\max_{t \in [0T]} \left\| \frac{u_\epsilon(t)}{\sqrt{\epsilon}} \right\|_{H^1(\Omega_1)} \leq K_3 \;,\; \max_{t \in [0T]} \left| \frac{u'_\epsilon(t)}{\sqrt{\epsilon}} \right|_{L^2(\Omega_1)} \leq K_4$$

Démonstration de (IV-18) et de (IV-19) :

1- Soit $w_1, \ldots, w_n, \ldots$ une base de $H_0^1(D)$ (séparable) et $V_n(t)$ l'espace engendré par $w_1, \ldots, w_n$:

$$v_n \in V_n(t) \Longleftrightarrow v_n = \sum_{i=1}^{n} v_{in}(t)\, w_i(x), \quad v_{in}(t) \in R.$$

et soit $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} u_{im}(t)\, w_i \in V_m(t)$ la solution du système différentiel linéaire :

(IV-20)

$$\frac{d^2}{dt^2}(u_m(t), w_j) + \left(\frac{d}{dt}(B_\varepsilon(t)\, u_m(t)), w_j\right) + A_\varepsilon(t; u_m(t), w_j) = (\tilde{f}(t), w_j$$

pour $j = 1, 2, \ldots, m$ où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire dans $L^2(D)$

(IV-21) $u_{im}(0) = \alpha_{im} = ((\tilde{u}_0, w_i))_{H^1(D)}$, $i = 1, \ldots, m$

(IV-22) $u'_{im}(0) = \beta_{im} = (\tilde{u}_1, w_i)$, $i = 1, \ldots, m$

2- Inégalités analogues à (IV-18) , (IV-19) pour u_m :

Multiplions les deux membres de (IV-20) par $u'_{jm}(t)$ et sommons sur j de 1 à m. Il vient :

(IV-23) $(u''_m(t), u'_m(t)) + ((B_\varepsilon(t)\, u_m(t))', u'_m(t)) + A_\varepsilon(t\ ;\ u_m(t), u'_m(t))$

$$= (\tilde{f}(t),\ u'_m(t))$$

Posons : $A'_\varepsilon(t\ ;\ u, v) = \frac{d}{dt}\left[A_\varepsilon(t\ ;\ u, v)\right]$, $\forall\, u, v \in H_0^1(D)$

Intégrons (IV-23) de 0 à s ($s \leq T$) ; on en déduit après intégration par parties :

$$|u'_m(s)|^2_{L^2(D)} + \mathcal{A}_\epsilon(s\,;\,u_m(s)\,,\,u_m(s)) = |u'_m(0)|^2_{L^2(D)} + \mathcal{A}_\epsilon(0\,;u_m(0),\,u_m(0))$$

$$+\int_0^s [\mathcal{A}'_\epsilon(t\,;u_m(t),\,u_m(t)) - 2\,Re\,((B_\epsilon(t)u_m(t))',\,u'_m(t)) + 2\,Re\,(\tilde{f}(t),\,u'_m(t))]\,dt$$

A partir des définitions de $\mathcal{A}_\epsilon(t\,;\,u,v)$, $B_\epsilon(t)$, $\tilde{f}$ et des hypothèses H on obtient :

$$\alpha\,\|u_m(s)\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\frac{u_m(s)}{\sqrt{\epsilon}}\|^2_{H^1(\Omega_1)} + d_0|u'_m(s)|^2_{L^2(\Omega)} + d_1|\frac{u'_m(s)}{\sqrt{\epsilon}}|^2_{L^2(\Omega_1)}$$

$$\leq \int_0^s |f|^2\,dt + d_2\int_0^s |u'_m(t)|^2_{L^2(\Omega)}\,dt + d_3\int_0^s \|u_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)}\,dt.$$

où les d_i sont des constantes positives indépendantes de m, ϵ, u_m.

Posons : $\theta_m(s) = \int_0^s [\,\|u_m(t)\|^2_{H^1(\Omega)} + |u'_m(s)|^2_{L^2(\Omega)}\,]\,dt$

De l'inégalité précédente il vient :

$$\theta_m(s) = e^{\subset T}\,,\ \subset \text{ constante positive, } \forall\ s \in\ ]0T[$$

et par suite :

$$(IV\text{-}24)\quad \max_{t\in[0T]} \|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq K_1\,;\ \max_{t\in[0T]} |u'_m(t)|_{L^2(\Omega)} \leq K_2$$

$$(IV\text{-}25)\quad \max_{t\in[0T]} \|\frac{u_m(t)}{\sqrt{\epsilon}}\|_{H^1(\Omega_1)} \leq K_3\,;\ \max_{t\in[0T]} |\frac{u'_m(t)}{\sqrt{\epsilon}}|_{L^2(\Omega_1)} \leq K_4$$

3- De $(IV\text{-}24)$ et $(IV\text{-}25)$ on conclut que pour $m \longrightarrow \infty$ on peut extraire une sous-suite $\mu \longrightarrow \infty$ telle que au sens de la convergence faible

$$(IV\text{-}26)\quad u_\mu \longrightarrow u^*_\epsilon \text{ dans } L^\infty(0T\,;\,H^1_0(D))\,,\ u'_\mu \longrightarrow u^{*\prime}_\epsilon \text{ dans } L^\infty(0T\,;\,L^2(D))$$

$$(IV\text{-}27)\quad \frac{u_\mu}{\sqrt{\epsilon}} \longrightarrow \frac{u^*_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} \text{ dans } L^\infty(0T\,;\,H^1(\Omega_1))\,,\ \frac{u'_\mu}{\sqrt{\epsilon}} \longrightarrow \frac{u^{*\prime}_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} \text{ dans } L^\infty(0T\,;\,L^2(\Omega_1))$$

où u^*_ϵ vérifie $(IV\text{-}18)$, $(IV\text{-}19)$

4- Montrons que $u^*_\epsilon \equiv u_\epsilon$ c'est à dire est solution de (P_ϵ) :

Pour cela considérons $\theta_j(t) \in \mathcal{C}^1([0T])$ avec $\theta_j(T) = 0$, $j=1,2,\ldots$ Reprenons le système (IV-20) avec $m = \mu$ et $j < \mu$. Multiplions les deux membres de (IV-20) par $\theta_j(t)$ et intégrons sur $[0T]$; il vient :

$$\int_0^T [(-u'_\mu, \varphi'_j) + ((B_\epsilon u_\mu)', \varphi_j) + A_\epsilon(t; u_\mu, \varphi_j)]\, dt$$
$$= \int_0^T (\tilde{f}(t), \varphi_j(t))\, dt + (u'_\mu(0), \varphi_j(0))$$

avec : $\varphi_j(x,t) = \theta_j(t) \cdot W_j(x)$

Passons à la limite pour $\mu \longrightarrow \infty$ dans l'égalité précédente. De (IV-26), (IV-27), (IV-21) et (IV-22) il s'ensuit :

$$(IV\text{-}28)\quad \int_0^T - (u^*_\epsilon, \varphi'_j) + ((B_\epsilon u^*_\epsilon)', \varphi_j) + A_\epsilon(t; u^*_\epsilon, \varphi_j)]\, dt$$
$$= \int_0^T (\tilde{f}, \varphi_j)\, dt + (\tilde{u}_1, \varphi_j(0))$$

$$\forall\ \varphi_j = \theta_j(t)\, W_j(x) \quad \text{où} \quad \theta_j(t) \in \mathcal{C}^1([0T]),\ \theta_j(T) = 0$$

et $u^*_\epsilon(0) = \tilde{u}_0$

(IV-28) est alors valable pour toute combinaison linéaire des φ_j ($j \geq 1$) et par densité pour tout $\varphi \in \Phi(D)$. u^*_ϵ est alors solution du problème (P_ϵ).

Point 2 - De (IV-18) et (IV-19) on conclut que de toute suite $\epsilon \longrightarrow 0$ on peut extraire une sous suite $\eta \longrightarrow 0$ telle que :

$$(IV\text{-}29)\quad u\eta \rightharpoonup w \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T; H^1(D)) \text{ faible}$$
$$u'\eta \rightharpoonup w' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T; L^2(D)) \text{ faible}$$

$$(IV\text{-}30)\quad \frac{u\eta}{\sqrt{\eta}} \Big| \Omega_1 \rightharpoonup \chi \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T; H^1(\Omega_1)) \text{ faible}$$
$$\frac{u'\eta}{\sqrt{\eta}} \Big| \Omega_1 \rightharpoonup \chi' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T; L^2(\Omega_1)) \text{ faible}$$

De (IV-29) et (IV-30) il vient : $w|_{\Omega_1 \times\,]0T[} \equiv 0$ et par suite :

$w|_{\Omega} \in L^\infty(0T\,;\, H_0^1(\Omega))$

Point 3 - $w|_{\Omega} \equiv u$ c'est à dire est solution du problème (P) :
Prenons dans (IV-16) : $\varphi \in \Phi(D)$ avec $\varphi \equiv 0$ dans $\Omega_1 \times]0T[$.

Il vient alors :

$$\int_0^T [a(t\,;\, u_\epsilon(t), \varphi(t)) - (u'_\epsilon(t), \varphi'(t))_{L^2(\Omega)} + ((B(t)\, u_\epsilon(t))', \varphi(t))_{L^2(\Omega)}]dt$$

$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t))_{L^2(\Omega)}\, dt + (u_1, \varphi(0))_{L^2(\Omega)}$$

Par passage à la limite dans l'égalité précédente avec $\epsilon = \eta$, on déduit de (IV-29) et (IV-30) que $w|_{\Omega}$ est solution de (IV-7) pour tout $\varphi \in \Phi(D)$, $\varphi \equiv 0$ dans $\Omega_1 \times]0T[$.

Or ces fonctions φ sont denses dans $\Phi(\Omega)$ où :

$$\Phi(\Omega) = \{\varphi \mid \varphi \in L^2(0T\,;\, H_0^1(\Omega)),\ \varphi' \in L^2(]0T[\times \Omega),\ \varphi(T) = 0\}$$

Par conséquent $w|_{\Omega}$ vérifie (IV-7) pour tout $\varphi \in \Phi(\Omega)$ c'est à dire est solution de (P)

Remarque IV-1 En plus du théorème IV-1 on a montré que :

(IV-31) $\dfrac{u_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}|_{\Omega_1} \longrightarrow \chi$ dans $L^\infty(0T\,;\, H^1(\Omega_1))$ faible.

(IV-32) $\dfrac{u'_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}|_{\Omega_1} \longrightarrow \chi'$ dans $L^\infty(0T\,;\, L^2(\Omega_1))$ faible.

où $\chi \in L^\infty(0T\,;\, H^1(\Omega_1))$, $\chi' \in L^\infty(0T\,;\, L^2(\Omega_1))$

Remarque IV-2 On aurait pu prendre le choix plus simple de A_{ij}, A_0 :

$A_{ij} = \{a_{ij}(x,t)$ dans $\Omega \times]0T[$, δ_{ij} dans $\Omega_1 \times]0T[\}$

$A_0 = \{a_0(x,t)$ dans $\Omega \times]0T[$, $\dfrac{1}{\epsilon}$ dans $\Omega_1 \times]0T[\}$

Le théorème *IV-1* reste valable mais (*IV-31*) et (*IV-32*) n'ont lieu que dans $L^\infty(0T\,;\,L^2(\Omega_1))$ et $L^\infty(0T\,;\,L^2(\Omega_1))$ respectivement.

De même qu'au chapitre *III* on pourrait régulariser les coefficients de la forme $A_\epsilon(t\,;\,u,v)$ ainsi que $B_\epsilon(t)$ et $\tilde{f}(t)$, tels qu'ils aient les mêmes propriétés de différentiabilité que $a(t\,;\,u,v)$, $B(t)$ et $f(t)$.

II-3 Problèmes approchés (P_ϵ) par la méthode du domaine auxiliaire correspondant aux problèmes de NEUMANN et mêlés.

Nous donnerons la construction de (P_ϵ) pour un problème mêlé et le théorème de convergence qui lui correspond sans démonstration, celle-ci étant en tout point analogue à celle du théorème *IV-1*. Puis nous montrerons comment procéder pour un problème de Neumann.

Problème initial de type mêlé : (P)

- $H = L^2(\Omega)$
- $V = V_0 = \{v \mid v \in H^1(\Omega)\,,\ v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$ où $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ avec $\overset{0}{\Gamma}_1 \cap \overset{0}{\Gamma}_2 = \Phi$, Γ_1 de capacité positive.
- $A(t)$ = opérateur donné en (*IV-10*)

Problème approché (P_ϵ) de type DIRICHLET

- *Construction du domaine D de résolution* :

Soit $\Omega_1 \subset\subset \bar{\Omega}$ ayant Γ_1 comme frontière commune avec Ω puis $\Omega_2 \subset\subset \bar{\Omega}^*$ où $\Omega^* = \Omega_1 \cup \overset{0}{\Gamma}_1 \cup \Omega$

D = intérieur de $\bar{\Omega} \cup \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ supposé borné ; $S = \partial D$

- *Choix de $A_\epsilon(t\,;\,u,v)$* :

identique à (*IV-11*) avec :

$$A_{ij} = \{a_{ij} \text{ dans } \Omega \times [0T]\,,\ \frac{1}{\epsilon}\,\delta_{ij} \text{ dans } \Omega_1 \times [0T],\ \epsilon\,\delta_{ij} \text{ dans } \Omega_2 \times [0T]\}$$

$$A_0 = \{a_0 \text{ dans } \Omega \times [0T],\ \frac{1}{\epsilon} \text{ dans } \Omega_1 \times [0T]\,,\ \epsilon \text{ dans } \Omega_2 \times [0T]\}$$

Définition de $B_\varepsilon(t)$, $C_\varepsilon(t)$

$$B_\varepsilon(t)\, f(x,t) = B(t)\, f(x,t)\big|_{\Omega \times [0T]} + \frac{1}{\varepsilon}\, f(x,t)\big|_{\Omega_1 \times [0T]} + \varepsilon\, f(x,t)\big|_{\Omega_2 \times [0T]}$$

pour tout $f \in L^2(D)$

$$C_\varepsilon(t)\, f(x,t) = f(x,t)\big|_{\Omega^* \times [0T]} + \varepsilon\, f(x,t)\big|_{\Omega_2 \times [0T]}, \forall\ f \in L^2(D)$$

$\tilde{f}(x,t)$, $\tilde{u}_0(x)$, $\tilde{u}_1(x)$ sont définis comme au § *II-2*

Nous posons le :

Problème approché (P_ε) Déterminer u_ε telle que :

$u_\varepsilon \in L^\infty(0T;\ H_0^1(D))$, $u'_\varepsilon \in L^\infty(0T;\ L^2(D))$ et :

$$\int_0^T \left[A_\varepsilon(t;\ u_\varepsilon(t),\ v(t)) - (C_\varepsilon(t)\, u'_\varepsilon(t),\ v'(t)) + (\!(B_\varepsilon(t)\, u_\varepsilon(t))',\ v(t)\!) \right] dt$$

$$= \int_0^T (\tilde{f}(t),\ v(t))\ dt + (\tilde{u}_1, \varphi(0))$$

$\forall\ v \in \Phi(D) = \{v \mid v \in L^2(0T;\ H_0^1(D)),\ v' \in L^2([0T] \times D),\ v(T) = 0\}$

où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire dans $L^2(D)$

et : $u_\varepsilon(0) = \tilde{u}_0$

Nous déduisons du Résultat *IV-1* le :

Résultat IV-4 Sous les hypothèses H le problème approché (P_ε) admet une solution et une seule pour tout $\varepsilon > 0$.

Puis nous démontrons comme pour le théorème *IV-1* le :

Théorème IV-2 Quand $\epsilon \longrightarrow 0$, si u et u_ϵ sont les solutions de (P) et (P_ϵ) respectivement:

$$u_\epsilon |_{\Omega \times [0T]} \rightharpoonup u \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T ; H^1(\Omega)) \text{ faible.}$$

$$u'_\epsilon |_{\Omega \times [0T]} \rightharpoonup u' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T ; L^2(\Omega)) \text{ faible.}$$

$$\frac{u_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} |_{\Omega_1 \times [0T]} \rightharpoonup \chi \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T ; H^1(\Omega_1)) \text{ faible.}$$

$$\frac{u'_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}} |_{\Omega_1 \times [0T]} \rightharpoonup \chi' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T ; L^2(\Omega_1)) \text{ faible.}$$

$$\sqrt{\epsilon}\, u_\epsilon |_{\Omega_2 \times [0T]} \rightharpoonup \theta \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T ; H^1(\Omega_2)) \text{ faible.}$$

$$\sqrt{\epsilon}\, u'_\epsilon |_{\Omega_2 \times [0T]} \rightharpoonup \theta' \quad \text{dans} \quad L^\infty(0T ; L^2(\Omega_2)) \text{ faible.}$$

où :
$$\begin{cases} \chi \in L^\infty(0T ; H^1(\Omega_1)), \quad \chi' \in L^\infty(0T ; L^2(\Omega_1)) \\ \theta \in L^\infty(0T ; H^1(\Omega_2)), \quad \theta' \in L^\infty(0T ; L^2(\Omega_2)) \end{cases}$$

La construction de (P_ϵ) pour un problème de Neumann (P) $(V = H^1(\Omega))$ s'obtient en posant formellement $\Gamma_1 = \emptyset$, $\Omega_1 = \emptyset$. Les résultats précédents sont encore valables.

Remarque IV-3 La méthode du domaine auxiliaire se généralise facilement à l'opérateur $A(t)$ d'ordre $2m$ donné en $(III\text{-}4')$ en prenant pour (P) le problème de Dirichlet $(V = H_0^m(\Omega))$ ou un problème de Neumann $(V = H^m(\Omega))$. La construction de D, $f^\sim$, R_ϵ, C_ϵ est semblable à celle faite ci-dessus en prenant pour forme :

$$A_\epsilon(t ; u, v) = \sum_{|p|, |q| \leq m} \int_D A_{pq} D_p u \; D_q \bar{v} \; dx$$

où les A_{pq} sont choisis comme au chapitre *I* pour t fixé. On montre alors la convergence de $u_\varepsilon|_{\Omega x [0T]}$ vers u dans $L^\infty(0T\,;\,H^m(\Omega))$.

III- *Equations d'évolution du second ordre en t dans un domaine non cylindrique Problème de DIRICHLET*

Nous conservons les notations du chapitre *III-§ III.*

III-1 *Enoncé du problème* :

Soit Q un ouvert de $R^n_x \times R_t$ contenu dans $t > 0$ et $A(t)$ l'opérateur d'ordre $2m$:

$$(IV\text{-}33)\qquad A(t) = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D_p\,(a_{pq}(x,t) D_q)\,, \quad (x,t) \in Q$$

Le problème formel s'écrit :

Problème (P) : Déterminer u "*assez régulière*" telle que :

$$\frac{d^2 u}{d t^2}(t) + \frac{d u}{d t}(t) + A(t)\,u(t) = f(t) \qquad \text{dans} \qquad Q$$

$$\gamma_j\, u(x,t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma'\,, \ \text{frontière latérale de } Q, \quad j=0,1,\ldots,m-1$$

$$u(x,0) = u_0(x) \qquad \text{dans} \qquad \Omega_0 = Q \cap \{t = 0\}$$

$$\frac{d u}{d t}(x,0) = u_1(x) \qquad \text{dans} \qquad \Omega_0$$

Remarque IV-4 : On pourrait introduire un opérateur linéaire $B(t)$ comme au § *II* - et considérer l'équation :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{d}{dt}\,(B(t)\,u(t)) + A(t)\,u(t) = f(t)$$

Tout ce qui suit serait valable en faisant des hypothèses convenables sur $B(t)$.

Précisons nos hypothèses :

Hypothèses K :

K_0 : $a_{pq}(x,t) \in L^\infty(Q_T)$ et $a_{pq}(x,t) = \overline{a_{qp}}(x,t)$ dans Q_T.

K_1 : $t \longrightarrow a_{pq}(x,t)$ est une fois continûment différentiable sur $[0T]$ pour tout $(x,t) \in Q_T$.

K_2 : $\forall\, T > 0$ fini, il existe $\lambda(T) \geq 0$ et $\alpha(T) > 0$ tels que :
$a_T(u,u) + \lambda(T)\,|u|^2_{L^2(Q_T)} \geq \alpha(T)\,\|u\|^2_{F(Q_T)}$, $\forall\, u \in F(Q_T)$

K_3 : $f \in L^2(Q_T)$

K_4 : $u_0 \in H_0^m(\Omega_0)$, $u_1 \in L^2(\Omega_0)$

Le problème (P) est équivalent au problème variationnel :

Problème V : Déterminer u telle que :

$$u \in F(Q_T) = H_0^{m,0}(Q_T)\,,\quad u' \in L^2(Q_T) \text{ et :}$$

$$(IV\text{-}34)\quad -(u',v') + (u',v) + a_T(u,v) = (f,v) + (u_1,\, v(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\forall\, v \in \Phi(Q_T) = \{v \mid v \in F(Q_T)\,,\ v' \in L^2(Q_T)\,,\ v(\,\cdot\,,T) = 0 \text{ dans } \Omega_T\}$$

$$\text{où}\quad (f,g) = (f,g)_{L^2(Q_T)}$$

$$(IV\text{-}35)\quad u(\,\cdot\,,0) = u_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_0).$$

D'après le Résultat *III*-5 $v(\,\cdot\,,T)$, $u(\,\cdot\,,0)$, $v(\,\cdot\,,0)$ ont un sens et appartiennent respectivement à $L^2(\Omega_T)$, $L^2(\Omega_0)$ et $L^2(\Omega_0)$.

L'existence d'une solution du problème V nous sera fournie par passage à la limite dans l'un des problèmes approchés construits ci-dessous.

L'unicité, par contre, n'est pas vraie sous les hypothèses K. Il convient d'ajouter une condition reliant les $a_{pq}(x,t)$ à la croissance du domaine Q (*cf. ROGAK* [17] pour $A(t) = -\Delta$ dont la généralisation pour $A(t)$ d'ordre $2m$ s'obtient sans difficulté).

III-2 *Construction d'un problème approché dans un domaine cylindrique par la méthode du domaine auxiliaire*

Soit $T > 0$ fini et $Q_T = Q \cap \{ 0 < t < T \}$ et considérons un ouvert ω de R^n tel que :

$$\omega \times [0T] \supset Q_T \qquad c.a.d. \qquad \omega \supset \Omega_t \qquad \forall\, t \in [0T]$$

Posons : $Q'_T = \omega \times [0T] - \overline{Q}_T =$ domaine auxiliaire.

Nous définissons pour tout $u, v \in H^m(\omega)$:

$$(IV\text{-}36) \qquad A_\varepsilon(t\,;\,u,v) = \sum_{|p|,|q| \le m} \int_\omega A_{pq}(x,t)\, D_x^p u\, D_x^q \bar{v}\, dx$$

et

$$(IV\text{-}37) \qquad A_\varepsilon^T(u,v) = \int_0^T A_\varepsilon(t\,;\,u,v)\, dt$$

où les $A_{pq}(x,t)$, définis sur $\omega \times [0T]$, prolongent $a_{pq}(x,t)$

Choix des $A_{pq}(x,t)$

$$A_{pq} = \{ a_{pq}(x,t) \text{ dans } Q_T,\ \delta_{pq} = \begin{cases} 1 \text{ si } p=q \\ 0 \text{ si } p \neq q \end{cases} \text{ dans } Q'_T \}$$

pour $|p| + |q| > 0$, $|p| \le m$, $|q| \le m$.

$\{ a_{00}(x,t)$ dans Q_T, $\frac{1}{\varepsilon}$ dans $Q'_T \}$ pour $p=q=0$

Posons :

- $\tilde{f}(x,t) = \{ f(x,t)$ dans Q_T , 0 en dehors $\}$
- $B_\epsilon(t)\, v(x,t) = \{ v(x,t)$ dans Q_T , $\frac{1}{\epsilon}\, v(x,t)$ dans $Q'_T \}, \forall\, v \in L^2(\omega \times [0T])$
- $\tilde{u}_i(x) = \{ u_i(x)$ dans Ω_0 , 0 ailleurs $\}$ $i = 0,1$

Nous définissons le problème approché V_ϵ dans le domaine cylindrique $\omega \times [0T]$ par :

Problème V_ϵ Déterminer u_ϵ telle que :

$$u_\epsilon \in L^\infty(0T ; H_0^m(\omega)) \quad , \quad u'_\epsilon \in L^\infty(0T ; L^2(\omega)) \quad \text{et :}$$

$$(IV\text{-}38) \int_0^T [- (u'_\epsilon , v') + (B_\epsilon(t)\, u'_\epsilon , v) + A_\epsilon (t ; u_\epsilon , v)]\, dt$$

$$= \int_0^T (\tilde{f}, v)\, dt + (u_1, v(0)) \qquad \text{où} \quad (\ , \ ) = (\ , \ )_{L^2(\omega)}$$

$$\forall\ v \in \Phi(\omega) = \{ v \mid v \in L^2(0T ; H_0^m(\omega)) , \ v' \in L^2(\omega \times [0T]) , v(T) = 0 \}$$

$$(IV\text{-}39) \qquad u_\epsilon(0) = \tilde{u}_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\omega)$$

Du Résultat *IV-1* on déduit aisément le :

Résultat IV-5 : Sous les hypothèses K le problème approché V_ϵ admet une solution unique pour tout $\epsilon > 0$.

Nous avons le théorème suivant :

Théorème IV-3 : Sous les hypothèses K, quelle que soit la suite $\epsilon \longrightarrow 0$ il existe une sous-suite $\eta \longrightarrow 0$, telle que :

(IV-40) $u\eta|_{Q_T} \rightharpoonup u$ dans $H^{m,0}(Q_T)$ faible

(IV-41) $u'\eta|_{Q_T} \rightharpoonup u'$ dans $L^2(Q_T)$ faible

(IV-42) $\frac{u\eta}{\sqrt{\eta}}|_{Q'_T} \rightharpoonup g$ dans $H^{m,0}(Q'_T)$ faible

(IV-43) $\frac{u'\eta}{\sqrt{\eta}}|_{Q'_T} \rightharpoonup g'$ dans $L^2(Q'_T)$ faible

où $\begin{cases} u \text{ est "une" solution du problème initial } V \\ g \text{ est un élément de } H^{m,0}(Q'_T) \text{ avec } g' \in L^2(Q'_T). \end{cases}$

Remarque IV-5 Si on admet l'unicité de la solution u de V la suite entière ϵ vérifie les quatre relations précédentes.

Démonstration du théorème IV-3

Nous n'en donnerons que le principe, semblable à celui du théorème IV-1 :

Point 1 : $\forall\ \epsilon > 0$ u_ϵ vérifie les inégalités.

$$\max_{t \in [0T]} \| u_\epsilon(t) \|_{H^m(\omega)} \leq C_1 \; ; \quad \max_{t \in [0T]} \| \frac{N u_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}(t) \|_{H^m(\omega)} \leq C_2$$

$$\max_{t \in [0T]} | u'_\epsilon(t) |_{L^2(\omega)} \leq C_3 ; \quad \max_{t \in [0T]} | \frac{N u'_\epsilon}{\sqrt{\epsilon}}(t) |_{L^2(\omega)} \leq C_4$$

où : $\begin{cases} \cdot\ N(x,t) = \{ 0 \text{ dans } Q_T \ , \ 1 \text{ dans } Q'_T \} \\ \cdot\ C_1, C_2, C_3, C_4, \text{ sont des constantes positives indépendantes de } \epsilon. \end{cases}$

démonstration identique au point 1 du théorème IV-1.

Point 2 : Des inégalités précédentes on déduit que de toute suite ϵ tendant vers zéro on peut extraire une sous-suite η telle que $u\eta$ et $u'\eta$ vérifient (IV-40),..., (IV-43).

De (IV-40) et (IV-42) on déduit que :

$$\left.\begin{array}{l} N\,u\eta \longrightarrow N\,u \\ N\,u\eta \longrightarrow 0 \end{array}\right\} \text{dans } L^\infty(0T\,;\, H_0^m(\omega)) \quad \text{d'où} \quad : \quad N\,u \equiv 0$$

Alors $u \equiv 0$ dans $Q'_T = \omega \times [0T] - \overline{Q}_T$ et par suite :

$$u\Big|_{Q_T} \in H_0^{m,0}(Q_T) \quad , \quad u'\Big|_{Q_T} \in L^2(Q_T)$$

Point 3 : $u|_{Q_T}$ est solution du problème initial *V*

$\forall\ v \in \Phi(Q_T)$ posons $\tilde{v} = \{\ v$ dans Q_T, 0 en dehors $\}$

alors : $\tilde{v} \in \Phi(\omega)$ défini en (IV-38) et par conséquent pour $\varepsilon = \eta$:

$$a_T(u_\eta|_{Q_T}, v) - (u'\eta|_{Q_T}, v')_{L^2(Q_T)} + (u'\eta|_{Q_T}, v)$$

$$= (f,v)_{L^2(Q_T)} + (u_1, v(0))_{L^2(\Omega_0)} \quad , \quad \forall\ v \in \Phi(Q_T)$$

quand $\eta \longrightarrow 0$, de (IV-40) et (IV-41) il vient à la limite :

$$a_T(u,v) - (u'|_{Q_T}, v')_{L^2(Q_T)} + (u'|_{Q_T}, v)_{L^2(Q_T)}$$

$$= (f,v)_{L^2(Q_T)} + (u_1, v(0))_{L^2(\Omega_0)} \quad , \quad \forall\ v \in \Phi(Q_T)$$

D'autre part, pour tout $\eta > 0$: $u\eta(0)\big|_{\Omega_0} = u_0$ dans $L^2(\Omega_0)$ et d'après (IV-40) $u\eta(0)\big|_{\Omega_0} \longrightarrow u(0)$ dans $L^2(\Omega_0)$

soit : $u(\ \cdot\ ,0) = u_0$ dans $L^2(\Omega_0)$

u est alors solution du problème *V* ; d'où le théorème.

Du théorème *IV-3* on déduit le :

Corrolaire IV-1 le problème initial V admet au moins une solution, sous les hypothèses K.

III-3 Problème approché par la méthode de GALERKIN

En conservant les mêmes notations qu'au chapitre *III* § *III-3*, nous supposons qu'il existe une base de $H_0^m(\Omega_t)$: $\varphi^j(x,t)$, $j = 1,2,\ldots$ pour tout $t \geq 0$, telle que :

- $\varphi^j(x,t) \in H_0^{m,0}(Q_T) = F(Q_T) \quad \forall\ j = 1,2,\ldots, \forall\ T > 0$ fini,
- $t \longrightarrow \varphi^j(x,t)$ est deux fois continûment différentiable sur $[0T]$ pour $(x,t) \in Q_T$ et tout $j \geq 1$.
- $\{\varphi^j\}$ est un système orthonormal dans $L^2(\Omega_t)$

On appelle encore :

$$\Phi_m = \{u_m \mid u_m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} u_{im}(t) \cdot \varphi^i(x,t),\ u_{im}(t) \in \mathcal{C}^2([0T] \longrightarrow R)\}$$

et on définit le problème approché :

Problème V_m: Déterminer $u_m \in \Phi_m$ telle que :

$$(IV\text{-}44)\quad a(t\,;\, u_m(t), \varphi^j(t)) + (u''_m(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)} + (u'_m(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)}$$

$$= (f(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)} \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, m \text{ et } t \in\ ]0T].$$

$$(IV\text{-}45)\quad u_{jm}(0) = ((u_0\ ,\ \varphi^j(0)))_{H_0^m(\Omega_0)}\ ,\quad j = 1,\ldots,m$$

$$(IV\text{-}46)\quad u'_{jm}(0) = (u_1,\ \varphi^j(0))_{L^2(\Omega_0)}\ ,\quad j = 1,\ldots,m$$

Nous ne ferons qu'énoncer le théorème obtenu, la démonstration étant analogue à celles des théorèmes *III-6* et *III-7*.

Théorème IV-4 Sous les hypothèses K, le problème approché V_m admet une solution unique u_m telle que :

$$\cdot\ u_m \in F(Q_T)\ ,\ u'_m \in L^2(Q_T)$$

Quand $m \longrightarrow \infty$ il existe une sous-suite $\mu \longrightarrow +\infty$ telle que :

$$u_\mu \longrightarrow u \quad \text{dans} \quad F(Q_T) \quad \text{faible}.$$
$$u'_\mu \longrightarrow u' \quad \text{dans} \quad L^2(Q_T) \quad \text{faible}.$$

où u est "*une*" solution du problème initial V

Le théorème *IV-4* nous fournit une autre démonstration du corrolaire *IV-1*. Pour déterminer u_m on est ramené à la résolution d'un système de m équations linéaires d'ordre deux.

III-4 *Construction d'un problème approché par la méthode variationnelle des différences finies.*

De la même manière qu'au chapitre *III* pour les équations paraboliques dans un domaine non cylindrique, nous allons associer au problème initial variationnel V une famille P_{hk} de problèmes approchés au sens des différences finies, généralisant les schémas donnés dans [15] pour un domaine cylindrique.

Nous conserverons les notations introduites au chapitre *III* § *III-4* ainsi qu'un certain nombre d'hypothèses que nous complèterons.

Posons : $\cdot\ V(t) = H_0^m(\Omega_t)$, $V'(t) = H^{-m}(\Omega_t)$

$\cdot\ H(t) = L^2(\Omega_t)$ pour tout $t \geqslant 0$

Avec ces notations le problème initial V peut encore s'écrire :

Problème V_1 : Déterminer u telle que :

$$u \in L^2(0T\ ;\ V(t))\ ,\ u' \in L^2(0T\ ;\ H(t)) \quad \text{et} :$$

$$(IV\text{-}47)\quad \int_0^T \left[a(t\,;\, u(t), \varphi(t)) - (u'(t), \varphi'(t))_{L^2(\Omega_t)} + (u'(t), \varphi(t))_{L^2(\Omega_t)} \right] dt$$

$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t))_{L^2(\Omega_t)}\, dt + (u_1, \varphi(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

$$\forall\, \varphi \in \Phi(Q_T) = \{ \varphi \mid \varphi \in L^2(0T\,;\, V(t)),\ \varphi' \in L^2(0T\,;\, H(t)),\ \varphi(T) = 0 \}$$

$$(IV\text{-}48)\qquad u(\,.\,, 0) = u_0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega_0).$$

Hypothèses : Nous conservons les hypothèses K_0, K_1, K_3 et K_4 du § *III*-1 en remplaçant K_2 par :

$K'2$: $\forall\, v \in V(t)$, il existe $\lambda(T) \geq 0$, $\alpha(T) > 0$ tels que :

$$a(t\,;\, v, v) + \lambda(T)\, |v|^2_{H(t)} \geq \alpha(T)\, \|v\|^2_{V(t)}\,,\ \forall\, t \in [0, T]$$

On peut toujours se ramener au cas où $\lambda(T) = 0$ en changeant u en $e^{kt} u$ avec $k > \lambda(T)$

Le problème V_1 admet alors une solution au moins.

III-4-1 *Construction du problème approché* :

Comme au chapitre *III* § *III*-4 nous introduisons pour tout $t \geq 0$

$V_h(t)$: une famille d'espaces de Hilbert sur C dépendant du paramètre $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $(h_i > 0)$, munis de deux produits scalaires $(\ ,\ )_{V_h(t)}$, $((\ ,\ ))_{V_h(t)}$, dont les normes associées vérifient (*III*-35)

$O_h(t)$: $\in \mathcal{L}(H(t), V_h(t))$ tels que : $|O_h(t)|_h \leq C_1$, $\forall\ t \in [0T]$

$a_h(t\,;\, u_h, v_h)$: une famille de formes sesquilinéaires continues vérifiant (*III*-36),...,(*III*-39)

$0, k, \ldots, mk = T$ un partage de l'intervalle $0, T$

$V_{h,q}^{p}(rk)$, $V_h(\omega)$ et $\Pi_q^p(rk)$ vérifiant (III-40),...,(III-44)

$E_q^p(r_1 k, r_2 k ; V_h(t))$, $A_{hk}(t)$, $\nabla_k \varphi(t)$, $\overline{\nabla}_k \varphi(t)$, $f_{hk}(t)$.

Nous supposons en plus que :

. Il existe une famille d'opérateurs linéaires : $s_h(t) \in \mathcal{L}(V(t), V_h(t))$ définie pour tout $t \geq 0$ et $h \in R_+^n$ telle que :

(IV-49) $\| s_h(t)\, u \|_{V_h(t)} \leq C_3 \| u \|_{V(t)}$, $\forall\, u \in V(t) = H_0^m(\Omega_t)$

où C_3 est une constante positive indépendante de h et $t \in [0T]$

. $\forall\ u_h \in V_h(t)$:

(IV-50) $a_{hk}(t ; \Pi_q^p(t)\ \tilde{u}_h(t), \Pi_q^p(t)\ \tilde{u}_h(t)) \leq a_{hk}(t ; \Pi_n^m(t)\ \tilde{u}_h(t), \Pi_n^m(t)\ \tilde{u}_h(t))$

si $0 \leq m \leq p$ et $q \leq n \leq 0$, pour tout $t \in [0T[$.

Posons pour u_{hk}, $v_{hk} \in V_{h,0}^{2}(t)$:

$\{\nabla_k\, a_{hk}\}(t ; u_{hk}(t), v_{hk}(t)) =$

$$\frac{1}{k}\left[a_{hk}(t + k ; u_{hk}(t), v_{hk}(t)) - a_{hk}(t ; u_{hk}(t), v_{hk}(t))\right]$$

et pour u_{hk}, $v_{hk} \in V_{h,-1}^{1}(t)$:

$\{\overline{\nabla}_k\, a_{hk}\}(t ; u_{hk}(t), v_{hk}(t)) =$

$$\frac{1}{k}\left[a_{hk}(t ; u_{hk}(t), v_{hk}(t)) - a_{hk}(t - k ; u_{hk}(t), v_{hk}(t))\right]$$

A partir de l'hypothèse K_1 on montre facilement que :

(IV-51) $$\sum_{|p|,|q| \leq m} \int_{\Omega_t} a'_{pq}(x,t)\, D_x^p u\ D_x^q \overline{v}\, dx \leq P \|u\|_{V(t)} \|v\|_{V(t)}$$

pour tout $u, v \in V(t)$ et $t \in [0T]$ où P est une constante positive ne dépendant que des données.

De (IV-51) on déduit que pour k assez petit :

$$(IV\text{-}52)\quad |\{\nabla_k a_{hk}\}(t ; u_{hk}, v_{hk})| \leq P \|u_{hk}\|_{V_h(t)} \|v_{hk}\|_{V_h(t)}$$

$$(IV\text{-}53)\quad |\{\nabla_k a_{hk}\}(t ; u_{hk}, v_{hk})| \leq P(h,t) |u_{hk}|_{V_h(t)} |v_{hk}|_{V_h(t)}$$

$\forall\, u_{hk}, v_{hk} \in E_0^2(0, T + k ; V_h(t))$ et $t \in [0, T - k[$

où $P(h,t)$ est une constante ne dépendant que de h et t, infiniment grand du même ordre que $M(h,t)$ défini en (III-37).

Des relations analogues sont obtenues pour $\{\overline{\nabla}_k a_{hk}\}(t ; u_{hk}, v_{hk})$ si on prend $u_{hk}, v_{hk} \in E_{-1}^1(0, T + k ; V_h(t))$ et $t \in [k, T[$.

Nous définissons maintenant deux types de problèmes approchés au sens des différences finies :

Problème P_{hk}^1 : Déterminer $u_{hk} \in E_{-2}^0(-k, T ; V_h(t))$ telle que :

$$(IV\text{-}54)\quad (\Pi_{-2}^1(t)\, \overline{\nabla}_k^2 \tilde{u}_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)} + a_{hk}(t ; u_{hk}(t), v_{hk}(t)) + (\Pi_{-2}^1(t)\, \overline{\nabla}_k \tilde{u}_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)} = (f_{hk}(t), v_{hk}(t))_{V_h(t)}$$

$\forall\, v_{hk} \in E_{-2}^1(k, T ; V_h(t))$ et $\forall\, t \in [k, T[$

$$(IV\text{-}55)\quad u_{hk}(0) = \Pi_{-2}^1(0)\ (s_h(0)\, u_0)$$

$$(IV\text{-}56)\quad \Pi_{-3}^0(0)\ \overline{\nabla}_k\ \tilde{u}_{hk}(0) = \Pi_{-3}^0(0)\ (o_h(0)\, u_1)$$

Problème P_{hk}^2 : Déterminer $u_{hk} \in E_{-2}^0(0, T+k ; V_h(t))$ telle que :

$$(IV\text{-}57)\quad (\Pi_{-2}^1(t)\ \bar{\nabla}_k \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t)\ ,\ v_{hk}(t))_{V_h(t)} + a_{hk}(t ; \Pi_{-1}^1(t)\ \tilde{u}_{hk}(t),\ v_{hk}(t))$$

$$+ (\Pi_{-1}^1(t)\ \bar{\nabla}_k\ \tilde{u}_{hk}(t)\ ,\ v_{hk}(t))_{V_h(t)} = (f_{hk}(t),\ v_{hk}(t))_{V_h(t)}$$

$\forall\ v_{hk} \in E_{-1}^1(k ; T+k ; V_h(t))$ et $\forall\ t \in [k, T[$

$$(IV\text{-}58)\quad u_{hk}(0) = \Pi_{-2}^0(0)\ (s_h(0)\ u_0)$$

$$(IV\text{-}59)\quad \Pi_{-1}^1(0)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(0) = \Pi_{-1}^1(0)\ (\sigma_h(0)\ u_1)$$

Nous avons le :

Résultat IV-6 : Sous les hypothèses précédentes les problèmes approchés P_{hk}^1 , P_{hk}^2 admettent une solution et une seule pour h et k fixés.

Démonstration :

Il est clair que P_{hk}^2 admet une solution unique : c'est un schéma explicite dont la solution au temps $t + k$ est connue dès que $u_{hk}(t)$ et $u_{hk}(t-k)$ le sont et telle que $u_{hk}(t+k) \in V_{h,-1}^1(t)$ c'est à dire $u_{hk} \in E_{-2}^0(0, T+k ; V_h(t))$

Démontrons le résultat pour le problème implicite P_{hk}^1 :

Pour $t \in [rk, (r+1)k[$, (IV-54) s'écrit :

$$(\Pi_{-2}^1(rk)\ \tilde{u}_{hk}(rk) + \Pi_{-2}^1(rk)\ \tilde{u}_{hk}((r-2)k) - 2\ \Pi_{-2}^1(rk)\ \tilde{u}_{hk}((r-1)k),\ v_{hk}(rk))_{V_h(rk)}$$

$$+ k\ (\Pi_{-2}^1(rk)\ \tilde{u}_{hk}(rk) - \Pi_{-2}^1(rk)\ \tilde{u}_{hk}((r-1)k)\ ,\ v_{hk}(rk))_{V_h(rk)}$$

$$+ k^2\ a_{hk}(rk ; \Pi_{-2}^1(rk)\ \tilde{u}_{hk}(rk)\ ,\ v_{hk}(rk)) = k^2\ (f_{hk}(rk)\ ,\ v_{hk}(rk))_{V_h(rk)}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\hat{a}_{hk}(rk ;\ u_{hk}(rk), v_{hk}(rk)) = (g_{hk}(rk),\ v_{hk}(rk))_{V_h(rk))}\ ,\ \forall\ v_{hk}(rk) \in V_{h,-2}^1(rk)$$

où : $u_{hk}(rk)$ est cherché dans $V_{h,-2}^{1}(rk)$

$g_{hk}(rk)$ est connu dès que $u_{hk}((r-1)k)$ et $u_{hk}((r-2)k)$ le sont .

et : $\hat{a}_{hk}(rk\,;\,u_h\,,\,v_h) = k^2\, a_{hk}(rk\,;\,u_h\,,\,v_h) + (k+1)\,(u_h,\,v_h)_{V_h(rk)}$

Mais quel que soit $v_{hk} \in V_{h,-2}^{1}(rk)$:

$$Re\ \hat{a}_{hk}(rk\,;\,v_{hk},\,v_{hk}) \geq \alpha\, \|v_{hk}\|^2_{V_h(rk)}$$

d'où l'existence et unicité de $u_{hk}(rk)$ dans $V_{h,-2}^{1}(rk)$ d'après [7].

III-4-2 *Inégalités à priori*

En utilisant les propriétés des opérateurs de restriction $\Pi_q^p(t)$ et les hypothèses faites au § *III-4-1* , on peut établir de manière analogue au cas cylindrique [15] , des inégalités à priori vérifiées par la solution u_{hk} des problèmes P_{hk}^{1} et P_{hk}^{2} .Nous ne ferons donc qu'énoncer les résultats obtenus .

Résultat IV-7 La solution u_{hk} du problème P_{hk}^{1} vérifie pour k assez petit :

$$\|u_{hk}(t)\|_{V_h(t)} \leq E_1 ,$$

$$|\Pi_{-2}^{1}(t)\ \bar{\nabla}_k\ \tilde{u}_{hk}(t)|_{V_h(t)} \leq E_2 \text{ , pour tout } t \in [0,T[$$

Résultat IV-8 si k est assez petit et si :

(*IV-60*) $$\frac{k\,N(h)}{\sqrt{\alpha}} \leq 2(1-\delta) , \quad \delta>0 \text{ arbitrairement petit,}$$ la solution u_{hk} du problème P_{hk}^{2} vérifie :

$$\|\Pi_{-1}^{1}(t)\ \tilde{u}_{hk}(t)\|_{V_h(t)} \leq E_3$$

$$|\Pi_{-1}^{1}(t)\ \nabla_k\ u_{hk}(t)|_{V_h(t)} \leq E_4 \text{ pour tout } t \in [0,T[$$

où : $N(h) = \max_{t \in [0,T]} N(h,t)$, $N(h,t)$ défini en (III-38)

III-4-3 *Théorèmes de stabilité* :

Nous introduisons comme au chapitre III, pour tout $t \in [0T]$:

• l'espace de Hilbert $F(t)$ tel que $H(t)$ soit un sous-espace fermé de $F(t)$

• $p_h(t) \in \mathcal{L}(V_h(t), F(t))$ vérifiant (III-62) et (III-63)

• $\Pi r(t)$: l'opérateur de projection de $F(t)$ sur $H(t)$.

• $q_h(t) = \Pi r\ 0.P_h(t)$ vérifiant (III-64)

Suivant la définition III-1 de la stabilité nous déduisons des Résultats IV-7 et IV-8 les théorèmes :

Théorème IV-5 Pour k assez petit, la solution u_{hk} du problème P^1_{hk} est $L^\infty(0T\,;\,F(t))$ - stable et :

$$\Pi^1_{-1}(t)\ \bar{\nabla}_k\ \tilde{u}_{hk}(t) \text{ est } L^\infty(0T\,;\,H(t)) \text{ - stable .}$$

Théorème IV-6 Pour k assez petit et :

(IV-61) $\dfrac{k\,\nu(h)}{\sqrt{\alpha}} \leqslant 2(1-\epsilon)$, $\epsilon > 0$ arbitrairement petit ,

la solution u_{hk} du problème P^2_{hk} est $L^\infty(0T\,;\,F(t))$ - stable et

$$\Pi^1_0(t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t) \text{ est } L^\infty(0T\,;\,H(t)) \text{ stable,}$$

où $\nu(h)$ est la partie principale de $N(h)$ quand $|h| \longrightarrow 0$

III-4-4 Théorèmes de convergence faible :

Nous ne l'énoncerons que pour le problème P^2_{hk} , un résultat analogue étant valable pour P^1_{hk} .

Soit, comme au chapitre *III* :

• $\bar{\omega}(t) \in \mathcal{L}(V(t), F(t))$ pour tout $t \in [0,T]$

• γ : l'espace des fonctions de $\mathcal{D}(\bar{Q}_T)$ (indéfiniment différentiable en (x,t), à support dans $\bar{Q}_T$) nulles au voisinage de Γ^*_T , frontière latérale de Q_T , et de $\Omega_T = Q \cap \{t = T\}$

Alors γ est dense dans $\Phi(Q_T)$ défini en (*IV-4-7*).

• $r_h(t)$: une application linéaire de $\mathcal{D}(\Omega_t)$ dans $V^1_{h,-1}(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Pour $\varphi(x,t) \in \gamma$, posons :

$$(IV\text{-}62) \qquad \Psi_{hk}(x,t) = \sum_{s=1}^{m-1} r_h(sk)\, \varphi(x,sk)\, W_s(t)$$

Il est clair que :

$\Psi_{hk} \in E^1_{-1}(k, T+k ; V_h(t))$ avec $\Psi_{hk}(T) = 0$

Du théorème de stabilité *IV-6* on déduit que de toute suite (h,k) tendant vers zéro on peut extraire une sous-suite (h_1, k_1) telle que :

$$(IV\text{-}63) \qquad p_m(t)\, u_{h_1 k_1}(t) \longrightarrow U \text{ , dans } L^\infty(0T ; F(t)) \text{ faible .}$$

$$(IV\text{-}64) \qquad q_{h_1}(t) \left[\Pi^1_{-1}(t)\, \nabla_{k_1}\, \tilde{u}_{h_1 k_1}(t) \right] \longrightarrow u' = \Pi r'\, U' ,$$

dans $L^\infty(0T ; H(t))$ faible, quand $(|h_1|, k_1) \longrightarrow (0,0)$ en vérifiant (*IV-6-1*)

Hypothèses

Nous supposerons que si (*IV-63*) et (*IV-64*) ont lieu, alors quand

$|h_1|$, k_1 tendent vers zéro :

(IV-65) $u \in L^\infty(0T ; V(t))$ et $U = \tilde{\omega} u$.

(IV-66)

$$\int_{k1}^{T} a_{h1\ k1}(t ; \Pi_{-1}^{1}(t)\ \tilde{u}_{h1\ k1}(t), \Psi_{h1\ k1}(t))\ dt \longrightarrow \int_0^T a(t ; u(t), \varphi(t))\ dt$$

pour tout $\varphi \in \gamma$

(IV-67) $$\int_{k1}^{T} (\Pi_{-1}^{1}(t)\ \nabla_{k1}\ \tilde{u}_{h1\ k1}(t), \nabla_{k1}, \Psi_{h1\ k1}(t))_{V_{h1}(t)}\ dt.$$

$$\longrightarrow \int_0^T (u'(t) , \varphi'(t))_{H(t)}\ dt \text{ , pour tout } \varphi \in \gamma$$

(IV-68)

$$\int_{k1}^{T} (\Pi_{-1}^{1}(t)\ \tilde{u}_{h1\ k1}(t), \nabla_{k1}^{2}\ \Psi_{h1\ k1}(t))_{V_{h1}(t)}\ dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), \varphi''(t))_{H(t)}\ dt$$

pour tout $\varphi \in \gamma$

(IV-69)

$$\int_{k1}^{T} (\Pi_{-1}^{1}(t)\ \bar{\nabla}_{k1}\ \tilde{u}_{h1\ k1}(t), \Psi_{h1\ k1}(t))_{V_{h1}(t)} dt \longrightarrow \int_0^T (u'(t), \varphi(t))_{H(t)}\ dt$$

pour tout $\varphi \in \gamma$

(IV-70) $$\int_{k1}^{T} (O_{h1}(t)\ f(t), \Psi_{h1\ k1}(t))_{V_{h1}(t)}\ dt \longrightarrow \int_0^T (f(t), \varphi(t))_{H(t)}\ dt$$

pour tout $\varphi \in \gamma$

(IV-71) $(s_{h1}(0)\ u_0 , \nabla_{k1}\ \Psi_{h1\ k1}(0))_{V_{h1}(0)} \longrightarrow (u_0 , \varphi'(0))_{H(0)}$, pour tout $\varphi \in \gamma$

(IV-72) $(O_{h1}(0)\ u_1 , \Psi_{h1\ k1}(k_1))_{V_{h1}(0)} \longrightarrow (u_1 , \varphi(0))_{H(0)}$, pour tout $\varphi \in \gamma$

Prenons alors dans (IV-57) :

$v_{hk} = \Psi_{hk} \in E_{-1}^{1}(k , T ; V_h(t))$, $\varphi(x,t)$ quelconque dans γ

Il vient après intégration sur $[k,T]$:

(IV-73)

$$\int_k^T (\Pi_{-1}^{1}(t)\ \bar{\nabla}_k \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t),\ \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt + \int_k^T (\Pi_{-1}^{1}(t)\ \bar{\nabla}_k \tilde{u}_{hk}(t),\ \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt$$

$$+ \int_k^T a_{hk}(t\ ;\Pi_{-1}^{1}(t)\ \tilde{u}_{hk}(t),\ \Psi_{hk}(t))\ dt = \int_k^T (f_{hk}(t),\ \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt$$

Mais :

(IV-74) $$\int_k^T (\Pi_{-1}^{1}(t)\ \bar{\nabla}_k \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t),\ \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt =$$

$$- \int_k^T (\Pi_{-1}^{1}(t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t),\ \nabla_k\ \Psi_{hk}(t))_{V_h(t)}\ dt - (\Pi_{-1}^{2}(0)\ \nabla_k \tilde{u}_{hk}(0),\ \Psi_{hk}(k))_{V_h(0)}$$

$$+ \frac{1}{k} \int_k^T (\Pi_{-1}^{2}(t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t) - \Pi_{-1}^{1}(t)\ \nabla_k\ \tilde{u}_{hk}(t),\ \Psi_{hk}(t+k))_{V_h(t)}\ dt$$

En reportant (IV-74) dans (IV-73) on déduit de (III-41), (IV-65), ...,(IV-72) , que pour $h = h_1$, $k = k_1$ tendant vers zéro :

$$\int_0^T - (u'(t),\ \varphi'(t))_{H(t)}\ dt + \int_0^T (u'(t),\varphi(t))_{H(t)}\ dt + \int_0^T a(t\ ;\ u(t),\varphi(t))\ dt$$

$$= \int_0^T (f(t),\varphi(t))_{H(t)}\ dt + (u_1,\varphi(0))_{H(0)}$$

pour tout $\varphi \in \gamma$ où $u(t) \in H_0^{m,0}(Q_T)$, $u'(t) \in L^2(Q_T)$.

En utilisant la densité de γ dans $\Phi(Q_T)$ il s'ensuit que u vérifie (IV-47)

Il reste à montrer que $u(\cdot\ ,0) = u_0$. Mais nous avons :

$$\int_{\mathcal{J}_k}^{T} (\Pi_{-1}^{1}(t)\, \nabla_k\, \tilde{u}_{nk}(t),\ \nabla_k\, \Psi_{nk}(t))_{V_h(t)}\, dt = \int_{\mathcal{J}_k}^{T} (\Pi_{-1}^{1}(t)\, \tilde{u}_{nk}(t),\ \overline{\nabla}_k \nabla_k\, \Psi_{nk}(t))_{V_h(t)} dt$$

$$+ \frac{1}{k} \int_{\mathcal{J}_k}^{T} (u_{nk}(t) - \Pi_0^{i}(t)\, \tilde{u}_{nk}(t)\ ,\ \nabla_k\, \Psi_{nk}(t-k))_{V_h(t)}\, dt$$

$$- (u_{nk}(k),\ \nabla_k\, \Psi_{nk}(0))_{V_h(0)}$$

Par passage à la limite pour $h = h_1$, $k = k_1$ il vient, d'après (IV-67), (IV-68) , (IV-71) et (III-41) :

$$\int_{0}^{T} (u'(t),\ \varphi'(t))_{H(t)}\, dt = - \int_{0}^{T} (u(t),\ \varphi''(t))_{H(t)}\, dt - (u_0\ ,\ \varphi'(0))_{H(0)}$$

pour tout $\varphi \in \gamma$,

d'où l'on déduit :

$$(u(0)\ ,\ \varphi'(0))_{L^2(\Omega_0)} = (u_0\ ,\ \varphi'(0))_{L^2(\Omega_0)}\ ,\quad \forall\, \varphi \in \gamma$$

c.a.d. $u(0) = u_0$ dans $L^2(\Omega_0)$

$u(t)$ est alors solution du problème initial V_1

Enonçons le théorème obtenu :

Théorème IV-7 : Sous les hypothèses (IV-oo)...(IV-72) nous pouvons extraire de la suite $(u_{h,k})$ une sous-suite (u_{h_1,k_1}) telle que :

(IV-75) $p_{h_1}(t)\, u_{h_1,k_1}(t) \longrightarrow \tilde{\omega}\ u$ dans $L^\infty(0T\ ;\ F(t))$ faible .

(IV-76) $q_{h_1}(t)\, [\Pi_{-1}^{1}(t)\, \nabla_{k_1}\, \tilde{u}_{h_1,k_1}(t)\ ] \longrightarrow u'$ dans $L^\infty(0T\ ;\ L^2(\Omega_t))$ faible

où $u(x,t)$ est "une" solution du problème initial V_1

Remarque IV-6 : On obtient ainsi une nouvelle démonstration de l'existence d'une solution du problème V et si on sait que cette solution est unique toute la suite $(u_{h,k})$ vérifie (*IV-75*) et (*IV-76*)

CHAPITRE V

APPLICATIONS NUMERIQUES A DES PROBLEMES PARABOLIQUES DANS UN DOMAINE NON CYLINDRIQUE

Au cours de ce chapitre nous nous proposons de tester, sur quelques problèmes simples en dimension un ou deux, les différentes méthodes d'approximation décrites au chapitre *III*, pour des problèmes paraboliques à frontière variable avec le temps. Nous en comparerons la précision et les temps de calcul.

Au paragraphe *I* nous considérons un problème de Dirichlet de type parabolique en dimension un, sur lequel nous avons testé la méthode du domaine auxiliaire et la méthode de Galerkin généralisée.

Puis au paragraphe *II* nous avons choisi un problème de Dirichlet en dimension deux et étudié la méthode du domaine auxiliaire pour différents choix des paramètres introduits.

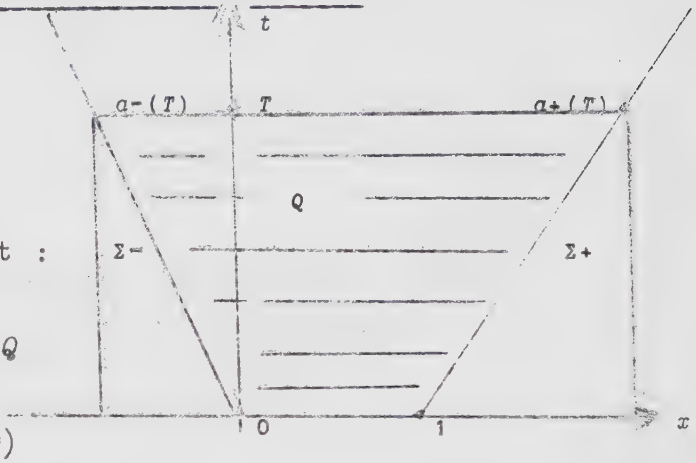
Enfin au paragraphe *III* sur un problème de Dirichlet en dimension deux plus élaboré nous avons fait une étude comparative des principaux types d'approximation décrits au chapitre *III*.

Au paragraphe *IV* nous tirerons quelques conclusions sur l'emploi de ces différentes méthodes.

I- Approximations d'un problème de Dirichlet en dimension un

I-1 Le problème initial

Il s'écrit formellement :



Problème P Déterminer u vérifiant :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f \text{ pour } (x,t) \in Q$$

$$u(x,t) = 0 \text{ sur } \Sigma- \text{ et } \Sigma+ \quad (t>0)$$

$$u(x,0) = u_0(x) , \quad x \in]\,0,\,1\,[$$

avec :

$$\Sigma - = \{ (x,t) \mid x = a-(t) = -\frac{1}{4}\, t \}$$

$$\Sigma + = \{ (x,t) \mid x = a+(t) = \frac{t}{2} + 1 \}$$

où Q est le domaine limité par $\Sigma -$, $\Sigma +$ et $t>0$, $f(x,t)$ et $u_0(x)$ donnés .

Nous nous sommes donnés la solution exacte $u(x,t)$ du problème P :

$$\underline{u(x,t) = (t + 4x) \cdot (t - 2x + 2)}$$

pour

$$f(x,t) = 2 (t + x + 9) , \quad (x,t) \in Q$$

$$u_0(x) = 8x \cdot (1 - x) , \quad x \in]\,0,\,1\,[$$

Posons :

$$a(t ; u, v) = \int_{a-(t)}^{a+(t)} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \, dx$$

et :

$$a_T(u,v) = \int_0^T a(t\,;\,u,v)\,dt = \int_{Q_T} \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}\,dx\,dt$$

pour tout $u,\ v \in H_0^{1,0}(Q_T)$ où $Q_T = Q \cap \{0 < t < T\}$

Le problème P est équivalent au problème variationnel suivant :

Problème V : Déterminer $u \in \mathcal{B}(Q_T)$ telle que :

$$(V\text{-}1) \qquad a_T(u,v) - \langle u,\ D_t v \rangle = \langle f,\ v \rangle + (u_0\ ,\ v(0))_{L^2(0,1)}$$

pour tout $v \in B_T(Q_T)$.

où $\mathcal{B}(Q_T) = \{v \mid v \in H_0^{1,0}(Q_T) = F(Q_T),\ v' \in F'(Q_T)\}$

$B_T(Q_T)$ = adhérence dans $\mathcal{B}(Q_T)$ des fonctions identiquement nulles au voisinage de $\Omega_T =]\,a_-(T)\ ,\ a_+(T)\,[$.

$\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire entre $F(Q_T)$ et $F'(Q_T)$ son anti-dual

T est un nombre positif fini, arbitraire.

On vérifie facilement les hypothèses H du théorème *III-3*, d'où l'existence et l'unicité de la solution u du problème V.

I-2 Problème approché par la méthode du domaine auxiliaire

Nous nous plaçons dans le cadre du paragraphe *III-2* du chapitre *III* pour l'opérateur : $A(t) = -\Delta$.

Fixons nous une limite de temps T et approchons le problème V pour $(x,t) \in Q_T = Q \cap \{0 < t < T\}$.

Soit $\omega =]a_-(T), a_+(T)[$. Le problème approché V_ϵ sera résolu dans le domaine cylindrique $\omega \times [0T] \supset Q_T$.

La forme approché $A_\epsilon(u,v)$ s'écrit pour $u, v \in L^2(0T ; H^1(\omega))$:

$$(V\text{-}2) \quad A_\epsilon(u,v) = \int_0^T \int_\omega \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + A_0\, u.\, \bar{v} \right) dx\, dt.$$

où : $A_0 = \{0$ dans Q_T ; $\frac{1}{\epsilon}$ dans $Q'_T = \{\omega \times [0,T] - \bar{Q}_T\}\}$

Posons : $\tilde{f}(x,t) = \{f(x,t)$ dans Q_T , 0 dans $Q'_T\}$

$\tilde{u}_0(x) = \{u_0(x)$ $x \in]0,1[$, 0 en dehors $\}$

Problème approché V_ϵ : Déterminer $u_\epsilon \in \mathcal{B}(\omega \times [0T])$ telle que :

$$(V\text{-}3) \quad -\langle u_\epsilon , D_t v \rangle + A_\epsilon(u_\epsilon , v) = \langle \tilde{f}, v \rangle + (\tilde{u}_0 , v(0))_{L^2(\omega)}$$

pour tout $v \in B_T(\omega \times [0T])$.

On a vu que u_ϵ vérifiait alors :

$$(V\text{-}4) \quad \frac{\partial u_\epsilon}{\partial t} - \Delta u_\epsilon + A_0 u_\epsilon = \tilde{f} \text{ dans } F'(\omega \times [0T])$$

$$(V\text{-}5) \quad u_\epsilon(\cdot, 0) = \tilde{u}_0 \text{ dans } L^2(\omega)$$

Du résultat *III-7* et du théorème *III-5* on déduit que u_ϵ existe et est unique pour tout $\epsilon > 0$, et :

$$(V\text{-}6) \quad u_\epsilon \mid_{Q_T} \longrightarrow u \text{ dans } H^{1,0}(Q_T) \text{ fort quand } \epsilon \longrightarrow 0.$$

Résolution numérique du problème V_ε

Nous avons utilisé la méthode variationnelle des différences finies en prenant un schéma du type *Crank-Nicolson* (*cf.* [15])

Soit R_{hk} un réseau de pas $h = \Delta x$ en x, et $k = \Delta t$ en t, tels que :

$$\begin{cases} a_- (T) = - N_1 \, h \ , \quad a_+ (T) = N_2 \, h \ , \ N_1 \text{ et } N_2 \text{ entiers positifs.} \\ T = m \, k \ldots \quad m \text{ entier.} \end{cases}$$

Posons :

$$\omega_h = \{ x_i \mid x_i = ih \ , \ i = -N_1 + 1 , \ldots , N_2 - 1 \}$$
$$R_k = \{ t_j \mid t_j = jk \ , \ j = 0, 1, \ldots, m \}$$

Désignons par u_i^n la valeur approchée de $u_\varepsilon (x,t)$ au point $(x = ih \ , \ t = nk)$.

u_i^n est définie par $(x_i \ , \ t_n) \in \omega_h \times R_k$ par le schéma aux differences :

$$(V\text{-}7) \quad \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{k} - \frac{\delta_x^2 \, u_i^{n+1} + \delta_x^2 \, u_i^n}{2 h^2} + \frac{A_{0,i}^{n+1} \, u_i^{n+1} + A_{0,i}^n \, u_i^n}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\tilde{f}_i^{n+1} + \tilde{f}_i^{\,n} \right] . \quad \text{pour} \quad \begin{matrix} i = -N_1 + 1, \ldots, N_2 - 1 \\ n = 0, 1, \ldots, m - 1 \end{matrix}$$

$$(V\text{-}8) \quad u_i^0 = \tilde{u}_0 (ih, 0) \ , \ i = - N_1 + 1 , \ldots , N_2 - 1$$

où :

- $\delta_x^2 \, u_i^n = u_{i+1}^n + u_{i-1}^n - 2 \, u_i^n$
- $A_{0,i}^n = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{(i - \frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} A_0 (x, nk) \, dx .$
- $f_i^n = \dfrac{1}{k} \displaystyle\int_{nk}^{(n+1)k} \frac{1}{h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} f (x,t) \, dx \ . \ dt$

Le schéma (V-7), (V-8) est stable et convergent quand h et k tendent vers zéro.

Pour déterminer u_i^{n+1} à partir de u_i^n, on a à résoudre un système tridiagonal d'ordre $N_1 + N_2 - 2$ dont seuls certains termes diagonaux dépendent de ϵ (ceux correspondant à $(x_i, t_j) \in Q'_T$).

Résultats numériques :

Nous avons pris $T = 4$, d'où $\omega =]-1, +3[$, et approché le problème V_ϵ dans $\omega \times [0T] =]-1, 3[\times [0,4]$ par la schéma aux différences (V-7), (V-8) pour les valeurs suivantes de h, k, ϵ :

1) $h = \frac{1}{20}$, $k = \frac{1}{40}$ avec $\epsilon = 10^{-7}$ et $\epsilon = 10^{-5}$

12 . 480 points sur le réseau $\omega_h \times R_k$.

Temps de calcul : 3 minutes 30 secondes sur *IBM*. 704

2) $h = \frac{1}{20}$, $k = \frac{1}{80}$ avec $\epsilon = 10^{-7}$

24 . 960 points sur le réseau $\omega_h \times R_k$

Temps de calcul : 6 minutes 20 secondes.

3) $h = \frac{1}{40}$, $k = \frac{1}{80}$ avec $\epsilon = 10^{-7}$

49 . 920 points sur le réseau $\omega_h \times R_h$

Temps de calcul : 12 minutes.

Nous définissons l'erreur relative dans $l^2(Q_T)$ par :

$$(V\text{-}9)\quad \eta_2 = \left[\sum_{(x_i, t_j) \in \omega_h \times R_k} |u_i^j - u(ih, jk)|^2 \Big/ \sum_{(x_i, t_j) \in \omega_h \times R_k} |u(ih, jk)|^2 \right]^{1/2}$$

et l'erreur relative dans $L^\infty(Q_T)$ par :

$$(V\text{-}10) \qquad \eta_\infty = \max_{(x_i,t_j)\ \epsilon\ \omega_h \times R_k} \frac{|u_i^j - u(ih, jk)|}{|u(ih,jk)|}$$

Pour chacun des quatre choix de (ϵ, h, k) nous donnons les résultats numériques obtenus en certains points $(x_i\ t_j) \epsilon\ Q_T$, et les erreurs relatives dans $L^2(Q_T)$ et $L^\infty(Q_T)$.

METHODE DU DOMAINE AUXILIAIRE

			Problème I_ε	*Problème* II_ε	*Problème* III_ε	*Problème* IV_ε
t	x	*Solution exacte* $u(x,t)$	$u_i^n : \varepsilon = 10^{-5}$, $h = \frac{1}{20}, k = \frac{1}{40}$	$u_i^n : \varepsilon = 10^{-7}$, $h = \frac{1}{20}, k = \frac{1}{40}$	$u_i^n : \varepsilon = 10^{-7}$, $h = \frac{1}{20}, k = \frac{1}{80}$	$u_i^n : \varepsilon = 10^{-7}$, $h = \frac{1}{40}, k = \frac{1}{80}$
0,25	0	0,5625	0,5316	0,5241	0,5316	0,5574
"	0,5	2,8125	2,8323	2,8278	2,8200	2,8189
"	1	1,0625	1,0450	1,0510	1,0546	1,0741
0,50	0	1,2500	1,2245	1,2354	1,2621	1,2558
"	0,5	3,7500	3,7663	3,7689	3,7448	3,7608
"	1,1	1,4700	1,5077	1,4855	1,4621	1,4682
0,75	-0,1	1,0325	1,1643	1,1592	1,0665	1,0278
"	0,5	4,8125	4,8414	4,8347	4,8099	4,8137
"	0,75	4,6875	4,7273	4,7214	4,6949	4,6889
"	1,2	1,9425	1,9587	1,9515	1,9687	1,9605
1	-0,1	1,9200	1,9895	1,9780	1,9707	1,9478
"	0,5	6,0000	6,0483	6,0414	6,0130	6,0195
"	1,3	2,4800	2,5758	2,5606	2,5442	2,5031
1,5	-0,2	2,7300	2,6857	2,6695	2,7003	2,7438
"	0,5	8,7500	8,8026	8,7947	8,7645	8,7653
"	1,5	3,7500	3,8809	3,8744	3,8216	3,8039

t	x	$u(x,t)$	Problème I_ε	Problème II_ε	Problème III_ε	Problème IV_ε
2	- 0,4	1,9200	1,9878	1,9794	1,9790	1,9555
"	0	8,0000	8,0904	8,0806	8,0481	8,0299
"	1	12,0000	12,0668	12,0579	12,0152	12,0331
"	1,5	8,0000	8,0902	8,0812	8,0324	8,0385

Problème I_ε	$\varepsilon = 10^{-5}$, $h = \frac{1}{20}$, $k = \frac{1}{40}$	erreur relative dans $l^2(Q_T) = 2{,}32\ \%$ erreur relative dans $l^\infty(Q_T) \simeq 15\ \%$
Problème II_ε	$\varepsilon = 10^{-7}$, $h = \frac{1}{20}$, $k = \frac{1}{40}$	erreur relative dans $l^2(Q_T) = 2{,}01\ \%$ erreur relative dans $l^\infty(Q_T) \simeq 10\ \%$
Problème III_ε	$\varepsilon = 10^{-7}$, $h = \frac{1}{20}$, $k = \frac{1}{80}$	erreur relative dans $l^2(Q_T) = 1{,}05\ \%$ erreur relative dans $l^\infty(Q_T) \simeq 5\ \%$
Problème IV_ε	$\varepsilon = 10^{-7}$, $h = \frac{1}{40}$, $k = \frac{1}{80}$	erreur relative dans $l^2(Q_T) = 0{,}80\ \%$ erreur relative dans $l^\infty(Q_T) \simeq 3\ \%$

Pour $\varepsilon = 10^{-5}$ $\quad |u_\varepsilon| \leq 0{,}8.\ 10^{-2}$ à l'extérieur de Q_T

$\varepsilon = 10^{-7}$ $\quad |u_\varepsilon| \leq 0{,}7.\ 10^{-4}$ à l'extérieur de Q_T (problème I_ε).

On constate donc que le choix $\varepsilon = 10^{-5}$ est insuffisant et qu'il est nécessaire de choisir des pas h et k assez petits pour obtenir une approximation satisfaisante. Remarquons que c'est au voisinage de la frontière latérale $\Sigma -$ et $\Sigma +$ du domaine Q_T que l'approximation est la moins bonne.

I.3. Problème approché par la méthode de GALERKIN :

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre du paragraphe *III.3* du Chapitre *III*.

La construction du problème approché qui suit sera valable quels que soient $\Sigma -$ et $\Sigma +$ en supposant simplement que :

$a_-(0) = 0$, $a_+(0) = 1$ où :

$x = a_-(t)$, $x = a_+(t)$ sont les équations de $\Sigma -$, $\Sigma +$ respectivement.

Alors :

$$\Omega_t = Q \cap \{ s = t \} =]\, a_-(t), a_+(t)[\quad , \ t \geq 0.$$

Choix des $\varphi^j(x,t)$, *base de* $H_0^1(\Omega_t)$:

Nous prenons :

$$\varphi^n(x,t) = \sin n\Pi \left(\frac{x - a_-(t)}{a_+(t) - a_-(t)}\right), \ n = 1,2,\ldots, \ (x,t) \in Q$$

Pour t fixé positif, elles forment une base de $H_0^1(\Omega_t)$ et sont orthogonales dans $L^2(\Omega_t)$ (vérification immédiate).

Définissons le :

Problème approché V_m : Déterminer $u_m \in \Phi_m$ telle que :

$$(V\text{-}11) \quad (u'_m(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)} + \left(\frac{\partial u_m}{\partial x}(t), \frac{\partial \varphi^j}{\partial x}(t)\right)_{L^2(\Omega_t)} = (f(t), \varphi^j(t))_{L^2(\Omega_t)}$$

pour $j = 1,2,\ldots,m$

$$(V\text{-}12) \quad u_{jm}(0) = (u_0, \varphi^j(0))_{L^2(0,1)}, \ j = 1,\ldots,m$$

où : $\Phi_m = \{ u_m(x,t) \mid u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} u_{im}(t)\varphi^i(x,t), \ u_{im}(t) \in \mathcal{C}^1(t \geq 0) \}$

On vérifie facilement les hypothèses des *Théorèmes III-6* et *III-7* d'où l'existence et l'unicité de u_m et la convergence de u_m vers u dans $H_0^{1,0}(Q_T)$ fort quand $m \longrightarrow +\infty$.

On obtient ainsi un système de m équations différentielles du premier ordre pour déterminer $u_{im}(t)$, $i = 1,2,\ldots,m$.

Il s'écrit explicitement :

$$u'_{jm}(t) = \left\{ - \frac{j^2\pi^2}{(a_+(t)-a_-(t))^2} - \frac{1}{2}\frac{a'_+(t)-a'_-(t)}{a_+(t)-a_-(t)} \right\} u_{jm}(t)$$

$$- \frac{2}{a_+(t)-a_-(t)} \sum_{\substack{k\neq j \\ k=1,m}} \frac{kj}{j^2-k^2} \left(a'_+(t) + (-1)^{j+k}\, a'_-(t)\right) u_{km}(t)$$

$$+ \frac{2}{a_+(t)-a_-(t)} \int_{a_-(t)}^{a_+(t)} f(x,t)\, \varphi^j(x,t)\,dx \quad , \quad \text{pour} \quad j = 1,2,\ldots,m$$

et : $u_{jm}(0) = (u_0, \varphi^j(0))_{L^2(0,1)}$, $j = 1,2,\ldots,m$

Pour l'exemple choisi au § I - 1 nous avons :

$$a_-(t) = -\frac{1}{4}t \quad , \quad a_+(t) = \frac{t}{2} + 1$$

$$f(x,t) = 2(t+x+9) \quad , \quad u_0(x) = 8x\,(1-x) \ .$$

Le système différentiel s'écrit, après calculs :

$$u'_{jm}(t) = \frac{2}{r}\left[-\frac{j^2\pi^2}{2r} - \frac{3}{16}\right] u_{jm}(t) - j \sum_{k\neq j} \frac{k u_{km}(t)}{j^2-k^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\quad (-1)^{j+1}\right)$$

$$- \frac{4}{j\pi}\left(r + 8 - (2r+8)\,(-1)^j\right) \ , \quad \text{pour} \quad j = 1,2,\ldots,m$$

$$u_{jm}(0) = \frac{32}{j^3\,\Pi^3}\left[1 - (-1)^j\right] \ , \quad j = 1,2,\ldots,m$$

où : $r = \frac{3}{4}t + 1$.

Résultats numériques :

Nous avons pris successivement $m = 10$, $m = 15$ et $m = 20$. Les systèmes différentiels correspondants ont été résolus par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 avec : $\Delta t = \frac{1}{800}$ pour $m = 10$ et 15, $\Delta t = \frac{1}{1600}$ pour $m = 20$ (en prenant Δt plus grand il y a instabilité).
A titre de comparaison nous donnons les résultats numériques obtenus aux mêmes points qu'au § I - 2 pour $m = 10, 15$ et 20 ainsi que par la méthode du domaine auxiliaire pour $h = \frac{1}{80}$, $h = \frac{1}{40}$ et $\epsilon = 10^{-7}$ (problème IV_ϵ).

Méthode de Galerkin m = ordre du système différentiel associé

t	x	solution exacte $u(x,t)$	u_m : m=10	u_m : m=15	u_m : m=20	Problème IVS $u_i^n \simeq u_\varepsilon(x_i, t_n)$
0,25	0	0,5625	0,5592	0,5630	0,5632	0,5574
"	0,5	2,8125	2,8133	2,8124	2,8125	2,8189
"	1	1,0625	1,0653	1,0624	1,0620	1,0741
0,50	0	1,2500	1,2527	1,2508	1,2496	1,2558
"	0,5	3,7500	3,7501	3,7503	3,7502	3,7608
"	1,1	1,4700	1,4739	1,4696	1,4694	1,4682
0,75	-0,1	1,0325	1,0277	1,0338	1,0338	1,0278
"	0,5	4,8125	4,8115	4,8131	4,8127	4,8137
"	0,75	4,6875	4,6856	4,6875	4,6876	4,6889
"	1,2	1,9425	1,9476	1,9417	1,9417	1,9605
1	-0,1	1,9200	1,9233	1,9218	1,9197	1,9478
"	0,5	6,0000	5,9978	6,0006	6,0001	6,0195
"	1,3	2,4800	2,4864	2,4788	2,4791	2,5031
1,5	-0,2	2,7300	2,7333	2,7333	2,7299	2,7452
"	0,5	8,7500	8,7455	8,7502	8,7495	8,7653
"	1,5	3,7500	3,7592	3,7480	3,7488	3,8039

t	x	$u(x,t)$	u_m : m=10	u_m : m=15	u_m : m=20	Problème IV_ε : u_i^n
2	-0,4	1,9200	1,8998	1,9173	1,9208	1,9555
"	0	8,0000	7,9908	8,0022	7,9986	8,0299
"	1	12,0000	11,9933	11,9993	11,9990	12,0331
"	1,5	8,0000	7,9906	8,0021	7,9986	8,0385

Définissons comme au § I - 2 :

$\omega_h \times R_k = \{(x_i, t_j) \in Q_T \mid x_i = ih,\ t_j = jk\}$, $h = \Delta x$, $k = \Delta t$, T fixé

et :

• *L'erreur relative dans* $l^2(Q_T)$ entre u et u_m par :

$$\eta_2 = \left\{ \sum_{(x_i,t_j)\in\omega_h\times R_k} | u_m(x_i,t_j) - u(x_i,t_j) |^2 \Big/ \sum_{(x_i,t_j)\in\omega_h\times R_k} | u(x_i,t_j) |^2 \right\}^{1/2}$$

• *L'erreur relative dans* $l^\infty(Q_T)$ par :

$$\eta_\infty = \max_{(x_i,t_j)\in\omega_h\times R_k} \left\{ \frac{|u_m(x_i,t_j) - u(x_i,t_j)|}{|u(x_i,t_j)|} \right\}$$

Alors pour $h = \frac{1}{10}$, $k = 0{,}125$, $T = 2$

$m = 10$	$\eta_2 = 0{,}0924\ \%$	$\eta_\infty \simeq 0{,}45\ \%$
$m = 15$	$\eta_2 = 0{,}0281\ \%$	$\eta_\infty \simeq 0{,}15\ \%$
$m = 20$	$\eta_2 = 0{,}0123\ \%$	$\eta_\infty \simeq 0{,}13\ \%$

Temps de calcul sur IBM 704 :

11 minutes pour $m = 10$.

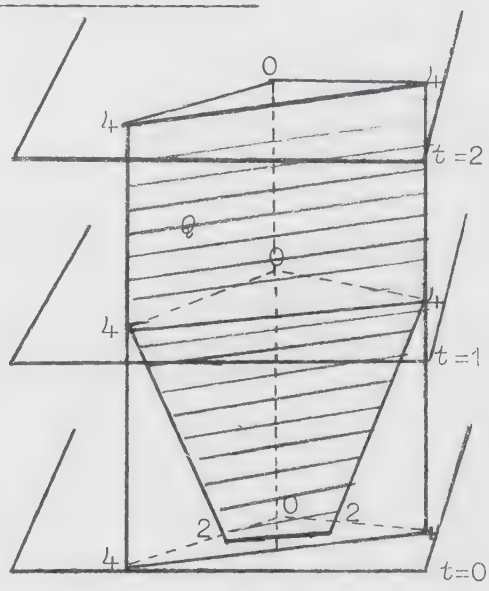
23 minutes pour $m = 15$.

1 heure 3 minutes pour $m = 20$.

La précision obtenue est donc bien meilleure par cette méthode que par celle du domaine auxiliaire, notamment au voisinage de la frontière latérale ($\Sigma -$, $\Sigma +$). Pratiquement $m = 15$ serait suffisant ici.

II. Approximation d'un problème de DIRICHLET en dimension deux dans un domaine non cylindrique par la méthode du domaine auxiliaire.

II.1 Le Problème initial :



Problème P : (formel) Déterminer u telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \quad \text{dans } Q.$$

$u(x,y;t) = 0$ sur Γ' frontière latérale de Q.

$u(x,y;0) = u_0(x,y)$ pour $(x,y) \in \Omega_0$

où :

. Q est un ouvert de $R_x^2 \times R_t$ défini par :

$$Q = \{(x,y,t) |\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 2(1 + t) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1\}$$
$$x > 0,\ y > 0,\ x + y < 4 \text{ si } 1 \leqslant t$$

. $\Omega_0 = Q \cap \{t = 0\} = \{(x,y) |\ x > 0,\ y > 0,\ x + y < 2\}$

. $\Gamma' = \{(x,y,t) |\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } \begin{cases} x + y = 2(1+t) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ x + y = 4 \text{ si } 1 \leqslant t \end{cases}\}$

Nous nous sommes donné la *solution exacte* :

$$\underline{u(x,y;t)} = \begin{cases} u_1(x,y;t) = x\,y(2 + 2t - x - y)(1 - \frac{1}{1+t}) \text{ si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u_2(x,y;t) = x\,y(4 - x - y)(1 - \frac{1}{t+1}) \text{ si } 1 \leqslant t \end{cases}$$

d'où :

. $u_0(x,y) \equiv 0$ dans Ω_0.

$$f(x,y,t) = \begin{cases} f_1(x,y,t) = 2.(xy + x + y).(1 - \frac{1}{t+1}) + xy.(2 + 2t - x - y).(\frac{1}{t+1})^2 \\ \qquad\qquad \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ f_2(x,y,t) = xy.(4 - x - y).\frac{1}{(t+1)^2} + 2.(x + y).(1 - \frac{1}{t+1}) \\ \qquad\qquad \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$$

Posons :

. $Q_T = Q \cap \{0 < t < T\}$, $T > 0$ fini, arbitraire.

. $a_T(u,v) = \int_{Q_T} (\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y})\, dx\, dy\, dt$, $\forall\ u,v \in H^{1,0}(Q_T)$

Le problème P est alors équivalent formellement au problème variationnel suivant :

Problème V : Déterminer $u \in \mathcal{B}(Q_T)$ telle que :

(V-13) $a_T(u,v) - < u, D_t v > = < f, v > + (u_0, v(0))_{L^2(\Omega_0)}$

pour tout $v \in B_T(Q_T)$

où :
- $\mathcal{B}(Q_T) = \{v \mid v \in H_0^{1,0}(Q_T),\ v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in F'(Q_T)$ dual de $F(Q_T) = H_0^{1,0}(Q_T)$
- $B_T(Q_T)$ = adhérence des fonctions identiquement nulles au voisinage de $\Omega_T = Q \cap \{t = T\}$, dans $\mathcal{B}(Q_T)$.
- $< , >$: désigne la dualité entre $F(Q_T)$ et $F'(Q_T)$.

Du théorème III-3 il découle que le problème V admet une solution u et une seule. Construisons maintenant le problème approché.

II.2 <u>*Problème approché cylindrique par la méthode du domaine auxiliaire*</u> :

Fixons nous une limite de temps $T = 2$ et considérons le domaine cylindrique $\omega \times [0T]$ où :

$$\omega = \{ (x,y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x + y < 4 \}$$

Alors : $\omega \times [0T] \supset Q_T = Q \cap \{ 0 < t < T \}$ pour $T = 2$.

Posons :

(V-14) $$A_\varepsilon(u,v) = \int_0^T \int_\omega (\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + A_0\, u\, \bar{v})\, dx.\, dy.\, dt$$

pour tout u, $v \in H^{1,0}(\omega \times [0T]) \equiv L^2(0T;H^1(\omega))$

où : $A_0(x,y,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y,t) \in Q_T \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } (x,y,t) \in \omega \times [0T] - \bar{Q}_T \end{cases}$.

et : $\tilde{f}(x,y,t) = \{ f(x,y,t) \text{ dans } Q_T \text{ , } 0 \text{ en dehors } \}$

$\tilde{u}_0(x,y) = \{ u_0(x,y) \equiv 0 \text{ dans } \Omega_0 \text{ , } 0 \text{ en dehors } \}$

Problème approché V_ε : Déterminer $u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega \times [0T])$ telle que :

(V-15) $\quad - < u_\varepsilon , D_t v > + A_\varepsilon(u_\varepsilon,v) = < \tilde{f},v >$

pour tout $v \in B_T(\omega \times [0T])$. $\quad \varepsilon > 0$ donné.

où $< , >$ désigne la dualité entre $F(\omega \times [0T])$ et $F'(\omega \times [0T])$.

On vérifie sans difficulté les hypothèses du Résultat III-7 et du Théorème III-5 d'où l'on déduit l'existence et unicité de u_ε pour tout $\varepsilon > 0$ donné et la convergence de $u_{\varepsilon|Q_T}$ vers u au sens suivant :

$$u_\varepsilon|Q_T \longrightarrow u \text{ dans } H^{1,0}(Q_T) \text{ fort quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, u_ε vérifie :

(V-16) $$\begin{cases} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon + A_0 u_\varepsilon = \tilde{f} \text{ dans } F'(\omega \times [0T]) \\ u_\varepsilon(x,y,0) \equiv 0 \text{ dans } L^2(\Omega_0). \text{ et } u_\varepsilon \in H_0^{1,0}(Q_T). \end{cases}$$

Résolution numérique du problème approché V_ε *dans* $\omega \times [0T]$:

Pour approcher la solution u_ε de (V-16) nous avons utilisé la méthode des directions alternées [4] que nous explicitions ci-dessous :

Nous considérons le réseau homogène de pas $\Delta x = \Delta y = h$ par rapport aux variables d'espace (x,y) et le réseau homogène de pas $\Delta t = k = \frac{T}{m}$ (m entiers) pour la variable de temps t.

Soit :

$\omega_h = \{(x_i,y_j) \mid x_i = ih, y_j = jh \text{ et } (x_i,y_j) \in \omega \text{ , } i,j \text{ entier } \}$

$R_k = \{t_n \mid t_n = nk, n = 0,1,\ldots,m \text{ avec } mk = T \}$

Nous noterons $u^n_{i,j}$ la valeur approchée de $u_\varepsilon(x,y,t)$ au point $x = i\,h,\ y = j\,h,\ t = n\,k$.

$(u^n_{i,j})$ est alors définie sur le réseau $\omega_h \times R_k$ par le schéma aux différences :

$$(V\text{-}17)\quad \frac{v^{n+\frac{1}{2}}_{i,j} - u^n_{i,j}}{(k/2)} - \frac{\delta_x^2 v^{n+1}_{i,j} + \delta_y^2 u^n_{i,j}}{h^2} + A^{n+1/2}_{0,i,j}.v^{n+1}_{i,j} = \tilde{f}^{n+1/2}_{i,j} \quad .$$

$$(V\text{-}18)\quad \frac{u^{n+1}_{i,j} - v^{n+1}_{i,j}}{(k/2)} - \frac{\delta_x^2 v^{n+1}_{i,j} + \delta_y^2 u^{n+1}_{i,j}}{h^2} + A^{n+1/2}_{0,i,j}.u^{n+1}_{i,j} = \tilde{f}^{n+1/2}_{i,j} \quad .$$

pour $n = 0,1,\ldots,m-1$ et (i,j) tels que $(ih,jh) \in \omega_h$.

et :

$(V\text{-}19)$ $u^0_{i,j} \equiv 0$ pour tout (i,j) tels que $(ih,jh) \in \omega_h$.

où :

- $A^{n+1/2}_{0,i,j} = A_0(ih,jh,(n+\frac{1}{2})k)$
- $\tilde{f}^{n+1/2}_{i,j} = \tilde{f}(ih,jh,(n+\frac{1}{2})k)$
- $\delta_x^2 u^n_{i,j} = u^n_{i+1,j} + u^n_{i-1,j} - 2.u^n_{i,j}$
- $\delta_y^2 u^n_{i,j} = u^n_{i,j+1} + u^n_{i,j-1} - 2.u^n_{i,j}$

$(V\text{-}17)$ et $(V\text{-}18)$ déterminent $(u^{n+1}_{i,j})$ à partir de $(u^n_{i,j})$, en utilisant les valeurs intermédiaires $(v^{n+1}_{i,j})$ définies sur ω_h , de la manière suivante :

. *pour chaque indice j fixé dans* $(V\text{-}17)$ tel que $j\,h \in\ ]0,4[$, on calcule $v^{n+1}_{i,j}$ à partir de $u^n_{i,j}$ pour tous les i tels que $(ih,jh) \in \omega_h$. Puis :

. *pour chaque indice i fixé dans* $(V\text{-}18)$ tel que $i\,h \in\ ]0,4[$ on calcule $u^{n+1}_{i,j}$ à partir de $v^{n+1}_{i,j}$, pour tous les j tels que $(ih,jh) \in \omega_h$.

A chaque fois la matrice du système est tridiagonale, donc inversible immédiatement ; avec (V-19) on obtient $u^n_{i,j}$ sur le réseau $\omega_h \times R_k$. Le schéma précédent est stable et convergent [4].

Résultats numériques :

Nous avons pris successivement :

① $h = 0,1$; $k = 0,025$.

② $h = 0,1$; $k = 0,0125$.

③ $h = 0,05$; $k = 0,025$.

④ $h = 0,05$; $k = 0,0125$.

Pour $h_1 = 0,1$; $k_1 = 0,1$ et ω_{h1} défini comme précédemment posons :

- $\Omega_{h1}(n\,k_1) = \{(i\,h_1, j\,h_1) \in \omega_{h1} \cap \Omega_t,\ i \text{ et } j \text{ entiers},\ t = n\,k_1\}$
- $Q^1_{h1k1} = \bigcup_{n=1,10} \Omega_{h1}(n\,k_1)$ = ensemble des points de $\omega_{h1} \times R_{k1} \in Q \cap \{0<t\leq 1\}$
- $Q^2_{h1k1} = \bigcup_{n=1,20} \Omega_{h1}(n\,k_1)$ = ensemble des points de $\omega_{h1} \times R_{k1} \in Q \cap \{0<t\leq 2\}$

Pour chacun des choix de (h,k,ε) nous avons évalué :

η_1 : l'erreur relative dans $l^2(Q^1_{h1k1})$ entre $(u^n_{i,j})$ et u .

η_2 : l'erreur relative dans $l^2(Q^2_{h1k1})$ entre $(u^n_{i,j})$ et u .

où $(u^n_{i,j})$ est la solution du schéma aux différences (V-17), (V-18), (V-19) et u la solution exacte du problème V.

avec :

$$\eta_m = \left\{ \frac{\sum_{(ih,\,jh,\,nk)\in Q^m_{h1k1}} |u^n_{i,j} - u(ih,\,jh,\,nk)|^2}{\sum_{(ih,\,jh,\,nk)\in Q^m_{h1,k1}} |u(ih,\,jh,\,nk)|^2} \right\}^{1/2} \quad ;\ m = 1,2.$$

η_1 représente l'erreur relative commise sur l'intervalle $t \in [0,1]$, partie non cylindrique du domaine Q_T, et η_2 l'erreur relative globale sur $t \in [0,T] = [0,2]$.

Nous donnons les valeurs de η_1 et η_2 pour les quatre choix de (h,k) et différentes valeurs de ε.

Les meilleurs résultats sont obtenus pour $h = 0,05$; $k = 0,0125$ et $\varepsilon \simeq 10^{-5}$ les erreurs les plus fortes étant commises au voisinage de la frontière de la partie non cylindrique du domaine Q_T

	$\epsilon = 10^{-4}$	$\epsilon = 10^{-5}$	$\epsilon = 10^{-6}$	$\epsilon = 10^{-7}$
1) $h = 0,1$ $k = 0,025$ η_1	8,111 %	4,175 %	3,023 %	2,484 %
1) $h = 0,1$ $k = 0,025$ η_2	3,009 %	3,517 %	2,899 %	2,513 %
2) $h = 0,1$ $k = 0,0125$ η_1	5,155 %	8,948 %	9,602 %	9,672 %
2) $h = 0,1$ $k = 0,0125$ η_2	1,943 %	3,347 %	3,587 %	3,613 %
3) $h = 0,05$ $k = 0,025$ η_1	2,934 %	3,367 %	3,416 %	3,422 %
3) $h = 0,05$ $k = 0,025$ η_2	1,015 %	1,171 %	1,189 %	1,191 %
4) $h = 0,05$ $k = 0,0125$ η_1	4,046 %	2,049 %	4,335 %	4,686 %
4) $h = 0,05$ $k = 0,0125$ η_2	1,462 %	0,749 %	1,614 %	1,746 %

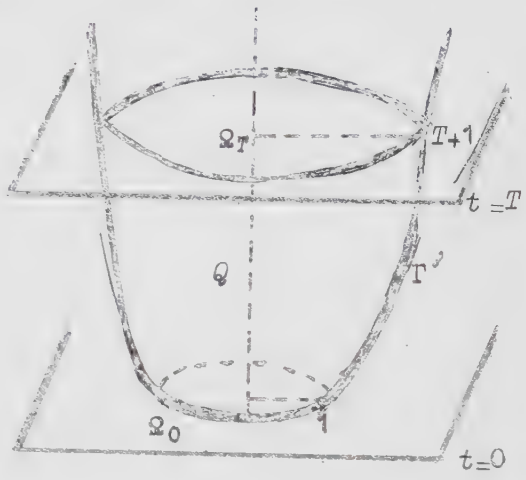
Temps de calcul : (*C.D.C.* 3600)

1) $h = 0,1$; $k = 0,025$: 32 secondes .
2) $h = 0,1$; $k = 0,0125$: 49 secondes .
3) $h = 0,05$; $k = 0,025$: 1 minute 29 secondes .
4) $h = 0,05$; $k = 0,0125$: 2 minutes 50 secondes .

III- *Etude comparative des différentes méthodes sur un problème de Dirichlet en dimensions deux.*

III-1 *Le problème initial*

Considérons le problème formel :



Problème P : déterminer $u(x,y,t)$ telle que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \text{ dans } Q$$

$u(x,y,t) = 0$ sur Γ' frontière latérale de Q

$u(x,y,0) = u_0(x,y)$ pour $(x,y) \in \Omega_0$

où :

- Q est l'ouvert de $R_x^2 \times R_t$ défini par :
  $Q = \{ (x,y,t) \mid x^2 + y^2 < t + 1 , \ t > 0 \}$
- $\Gamma' = \{ (x,y,t) \mid x^2 + y^2 = t + 1 , \ t > 0 \}$
- $\Omega_0 = Q \cap \{ t = 0 \} = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < 1 \}$

Pour tester les différentes méthodes d'approximation de u, définies au chapitre *III*, nous nous sommes donnés la solution exacte :

$$u(x,y,t) = x (t + 1 - x^2 - y^2)$$

pour :
- $f(x,y,t) = 9x$
- $u_0(x,y) = x (1 - x^2 - y^2)$

Posons :

- $Q_T = Q \cap \{ 0 < t < T \}$, $T > 0$ fini.
- $\Omega_{t0} = Q \cap \{ t = t_0 \} = \{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < t_0 + 1 \}$
- $a_T(u,v) = \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) dx \ dy \ dt$, $\forall \ u, v \in H^{1,0}(Q_T)$

Le problème P est alors équivalent au problème variationnel suivant :

Problème V : Déterminer $u \in \mathcal{B}(Q_T)$ telle que :

$$(V\text{-}20) \qquad a_T(u,v) - \langle u, D_t v \rangle = \langle f, v \rangle + (u_0, v(0))_{L^2(\Omega_0)}$$

pour tout $v \in B_T(Q_T)$

où :

- $\mathcal{B}(Q_T) = \{v \mid v \in H_0^{1,0}(Q_T) = F(Q_T),\ \dfrac{\partial v}{\partial t} \in F'(Q_T)$ dual de $F(Q_T)\}$
- $B_T(Q_T)$ = adhérence, dans $\mathcal{B}(Q_T)$, des fonctions identiquement nulles au voisinage de Σ_T
- $\langle , \rangle$ désigne la dualité entre $F(Q_T)$ et $F'(Q_T)$.

D'après le théorème *III-3* dont les hypothèses se vérifient sans difficulté dans notre cas, le problème V admet une solution unique $u(x,y,t)$.

Afin de comparer les différentes méthodes d'approximation du problème V, nous utiliserons un même critère d'erreur entre u et u_{hk} solutions exacte et approchée.

Considérons le réseau R_{hk} de pas $h = \Delta x = \Delta y$ dans les directions $x'x$, $y'y$ et $k = \Delta t$ dans la direction Ot, où $m\,k = T$, m entier.

Pour $M = (x_M, y_M, t_M) \in R_{hk}$ posons :

$$\sigma_h(M) = \{(x,y,t) \mid |x-x_M| < \frac{h}{2},\ |y-y_M| < \frac{h}{2} \text{ et } 0 < t-t_M < k\}$$

= parallèlotope de côtés h, h et k.

Sur la couche de temps $t = nk$ ($n = 0, 1, \ldots, m-1$) posons :

$\Omega_h(nk) = \{ M = (ih, jh, nk) \in R_{hk} \mid \sigma_h(M) \subset Q_T \ , \ i,j, \text{ entiers} \}$

et :

$Q_{hk}^T = \{ M = (ih, jh, nk) \in R_{hk} \mid M \in \Omega_h(nk) \text{ pour } n = 0,1,\ldots, m-1 \}$

Nous définissons alors :

. l'erreur relative dans $l^2(\Omega_h(nk))$ sur la couche de temps $t=nk$ $(n = 0,1,\ldots, m-1)$

par :

$$(V\text{-}21) \qquad ER(nk) = \left\{ \sum_{M \in \Omega_h(nk)} |u(M) - u_{hk}(M)|^2 \Big/ \sum_{M \in \Omega_h(nk)} |u(M)|^2 \right\}^{1/2}$$

. l'erreur relative globale dans $l^2(Q_{hk}^T)$ par :

$$(V\text{-}22) \qquad ERR.\ GLOBALE = \left\{ \sum_{M \in Q_{hk}^T} |u(M) - u_{hk}(M)|^2 \Big/ \sum_{M \in Q_{hk}^T} |u(M)|^2 \right\}^{1/2}$$

où $u(x,y,t)$ est la solution exacte du problème V et $u_{hk}(M)$ la solution approchée construite supposée définie sur le réseau R_{hk} .

(V-21) et (V-22) ont été calculés pour :

$\Delta x = \Delta y = h = 0,05$
$\Delta t = k = 0,025$
$T = 0,5$ quelle que soit la méthode utilisée

III-2 Problèmes approchés cylindriques par la méthode du domaine auxiliaire

Pour la limite de temps $T = 0,5$, nous considérons le domaine cylindrique $\omega \times [0T]$ avec :

$$\omega = \{ (x,y) \mid |x| < 1,6 \; ; \; |y| < 1,6 \}$$

Alors

$$\omega \times [0T] \supset Q_T$$

Posons, pour $u, v \in L^2(0T ; H^1(\omega))$:

$$(V\text{-}23) \qquad A_\epsilon (u,v) = \int_0^T \int_\omega [A_1 (\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}) + A_0 \, u \, \overline{v}] \, dx \, dy \, dt$$

où les coefficients $A_0 (x,y,t)$, $A_1 (x,y,t)$ sont choisis comme les A_{pq} du paragraphe *III*-2, Chapitre *III*.

Posons :

- $\tilde{f} (x,y,t) = \{ f (x,y,t)$ dans Q_T, 0 en dehors $\}$
- $\tilde{u}_0 (x,y) = \{ u_0 (x,y)$ dans Ω_0, 0 en dehors $\}$

Définissons alors le problème approché V_ϵ, sous forme variationnelle, dans le domaine cylindrique $\omega \times [0T]$:

Problème V_ϵ Déterminer $u_\epsilon \in \mathcal{B} (\omega \times [0T])$ telle que :

$$(V\text{-}24) \qquad - \langle u_\epsilon , D_t v \rangle + A_\epsilon (u_\epsilon , v) = \langle \tilde{f}, v \rangle + (\tilde{u}_0 , v(0))_{L^2(\omega)}$$

pour tout $v \in B_T (\omega \times [0T])$.

où $\langle \, , \rangle$ désigne cette fois la dualité entre $F(\omega \times [0T])$ et $F' (\omega \times [0T])$.

Nous donnerons deux choix des coefficients A_0, A_1 de la forme $A_\epsilon (u,v)$ (correspondant aux deux choix des $A_{pq}(x,t)$ du Chapitre *III*, § *III*-2), donc deux types de problèmes approchés cylindriques, ainsi que les schémas d'approximation du problème V_ϵ associé. Pour chacun de ces procédés nous avons testé le meilleur choix du paramètre ϵ.

III-2-1 *Premier choix des coefficients* A_0, A_1 *de* $A_\varepsilon(u,v)$:

Il consiste à prendre :

$$(V\text{-}25) \qquad A_1(x,y,t) \equiv 1 \text{ dans } \omega \times [0T].$$
$$A_0(x,y,t) = \begin{cases} 0 \text{ dans } Q_T \ ; \ \dfrac{1}{\varepsilon} \text{ dans } Q'_T = \omega \times [0T] - \bar{Q}_T \end{cases}$$

Ce choix est identique à celui des $A_{pq}(x,t)$ du chapitre *III*, § *III-2* utilisé pour la démonstration du théorème de convergence.

Du résultat *III-7* et du théorème *III-5* on déduit que le problème V_ε admet une solution unique u_ε pour tout $\varepsilon > 0$ et que :

$$u_\varepsilon \mid Q_T \longrightarrow u \text{ dans } H^{1,0}(Q_T) \text{ fort quand } \varepsilon \longrightarrow 0$$

où u est la solution du problème initial V.

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, u_ε vérifie :

$$(V\text{-}26) \qquad \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} - \Delta u_\varepsilon + A_0 u_\varepsilon = f' \text{ dans } F'(\omega \times [0T])$$
$$u_\varepsilon \in \mathcal{B}(\omega \times [0T])$$
$$u_\varepsilon(0) = \tilde{u}_0$$

Résolution numérique du problème V_ε *dans* $\omega \times [0T]$

Comme au paragraphe *II* nous avons utilisé la méthode des directions alternées en considérant un réseau homogène en (x,y) : $\Delta x = \Delta y = h$, et en t : $\Delta t = \frac{T}{m}$ (m entier). On définit de la même manière les ensembles ω_h et R_k, et si nous notons par u^n_{ij} la valeur approchée de $u_\varepsilon(ih, jh, nk)$, (u^n_{ij}) est alors donnée par le schéma aux différences (*V-17*) (*V-18*) et :

$$(V\text{-}19') \qquad u^0_{ij} = \tilde{u}_0(ih, jh) \text{ pour tout } (i,j) \text{ tel que } (x_i, t_j) \in \omega_h$$

Choix des pas h *et* k :

Nous avons pris :

$$\begin{cases} h_1 = \Delta x = \Delta y = 0{,}025 \\ k_1 = \Delta t = 0{,}0125 \quad \text{et} \quad k_1 = 0{,}00625 \end{cases}$$

Remarquons que pour $h_1 = 0{,}05$ ou $k_1 = 0{,}025$ l'approximation du problème V_ε est très mauvaise, quel que soit ε .

Pour chacune des valeurs de $k_1 = \Delta t$ nous avons recherché le meilleur choix du paramètre ε . Pour cela nous avons utilisé les critères d'erreur (V-21) et (V-22) c.a.d. en évaluant les erreurs relatives dans $l^2(\Omega_h(nk))$ et $l^2(Q^T_{hk})$ pour $h = 0{,}05$ et $k = 0{,}025$.

Dans le tableau ci-dessous nous donnons les variations de l'erreur relative globale dans $l^2(Q^T_{hk})$ suivant ε en prenant $h_1 = 0{,}025$ et $k_1 = 0{,}0125$ dans le schéma d'approximation :

ε	erreur relative globale dans $l^2(Q^T_{hk})$
$0{,}125.10^{-7}$	2,936 %
$0{,}125.10^{-5}$	2,089 %
$0{,}625.10^{-5}$	1,475 %
$0{,}1 \ .10^{-4}$	1,324 %
$1/9 \ .10^{-4}$	1,302 %
$0{,}125.10^{-4}$	1,285 %
$1/7 \ .10^{-4}$	1,277 %
$1/6 \ .10^{-4}$	1,287 %
$0{,}25 \ .10^{-4}$	1,430 %
$0{,}125.10^{-3}$	3,641 %

Temps de calcul sur C.D.C. 3600 : 1 minute 10 secondes

Le meilleur choix de ε est donc voisin de $\frac{1}{7} \cdot 10^{-4}$.

De la même manière pour $h_1 = 0{,}025$, $k_1 = 0{,}00625$ le meilleur choix de ε a été obtenu pour ε voisin de $\frac{1}{16} \cdot 10^{-5}$ qui donne comme *erreur relative globale* dans $l^2(Q_{hk}^T)$: 1,784% (temps de calcul : 2 minutes 8 secondes).

Pour les deux choix de $(h_1, k_1, \varepsilon$ optimum) nous donnons maintenant les variations de l'erreur relative dans $l^2(\Omega_h(nk))$ (formule (V-22)) évaluée pour $h = 0{,}05$, $k = 0{,}025$ et pour différentes valeurs de $t = nk$.

$t = nk$	erreur relative dans $l^2(\Omega_h(nk))$ $h_1=0{,}025; k_1=0{,}0125; \varepsilon=\frac{1}{7}\cdot 10^{-4}$	erreur relative dans $l^2(\Omega_h(nk))$ $h_1=0{,}025; k_1=0{,}00625; \varepsilon=\frac{1}{16}\cdot 10^{-5}$
0,025	0,851 %	1,484 %
0,125	1,271 %	1,755 %
0,225	1,205 %	1,869 %
0,325	1,493 %	1,664 %
0,425	1,120 %	1,787 %
0,475	1,167 %	1,909 %

III-2-2 - Deuxième choix des coefficients A_0, A_1 de $A\varepsilon(u,v)$:

(V-27) $$A_1(x,y,t) = \{1 \text{ dans } Q_T,\ \frac{1}{\varepsilon} \text{ dans } Q_T' = \omega \times [0T] - \overline{Q}_T\}$$
$$A_0(x,y,t) \equiv 0 \text{ dans } \omega \times [0T] .$$

Il correspond au second choix des $A_{pq}(x,t)$ du § III-2 chapitre III. On a toujours existence et unité de u_ε et d'après (III-28) convergence forte de $u_\varepsilon|_{Q_T}$ vers u dans $H^{1,0}(Q_T)$, quand $\varepsilon \longrightarrow 0$.

$A\varepsilon(u,v)$ s'écrit alors :

(V-28) $$A_\varepsilon(u,v) = \int_{Q_T} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right) dx\, dy\, dt + \int_{Q_T'} \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial \overline{v}}{\partial y}\right) dx dy dt$$

Résolution numérique du problème V_ε *dans* $\omega \times [0T]$:

Dans un premier stade nous avons utilisé la méthode des directions alternées donnant un schéma semi-implicite analogue à (V-17),(V-18); on constate alors un phénomène de propagation de l'erreur au voisinage de la frontière de Q_T qui rend l'approximation très mauvaise. Il en est de même pour un schéma explicite.

Nous avons alors utilisé le schéma implicite obtenu par la méthode variationnelle des différences finies cf. [15]. Nous donnons simplement le schéma d'approximation auquel on aboutit.

Considérons le réseau de pas $\Delta x = \Delta y = h$, $\Delta t = k$ en (x,y,t) et les ensembles $\omega_h \times R_k$ définis comme au § II. Si $u^n_{i,j}$ désigne la valeur approchée de $u_\varepsilon(ih,jh,nk)$ définie sur $\omega_h \times R_k$, on a le schéma :

$$(V\text{-}29)\quad \frac{u^{n+1}_{i,j} - u^{n}_{i,j}}{k} - \frac{A^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j}\,u^{n+1}_{i+1,j} + A^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j}\,u^{n+1}_{i-1,j} - (A^{n+1}_{i+\frac{1}{2},j} + A^{n+1}_{i-\frac{1}{2},j})\,u^{n+1}_{i,j}}{h^2}$$

$$- \frac{A^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}}\,u^{n+1}_{i,j+1} + A^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}}\,u^{n+1}_{i,j-1} - (A^{n+1}_{i,j+\frac{1}{2}} + A^{n+1}_{i,j-\frac{1}{2}})\,u^{n+1}_{i,j}}{h^2} = \tilde{f}^{n+1}_{i,j}$$

pour $n = 0,1,\ldots,m-1$ $\quad (mk = T)$ et $M = (ih,jh) \in \omega_h$

$$(V\text{-}30)\quad u^0_{i,j} = \tilde{u}_0(ih,jh) \quad \text{dans } \omega_h .$$

où on a posé :

$$A^{n+1}_{i,j} = \frac{1}{k.h^2} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{(j-\frac{1}{2})h}^{(j+\frac{1}{2})h} \int_{(i-\frac{1}{2})h}^{(i+\frac{1}{2})h} A_1(x,y,t)\,dx\,dy\,dt \ , \quad \forall\ i,j \text{ réels.}$$

et $\tilde{f}^{n+1}_{i,j}$ défini de manière analogue.

Pour chaque n $(n=0,1,\ldots,m-1)$, (V-29) nous donne un système d'équations linéaires dont l'ordre est égal au nombre de points de ω_h. La matrice du système étant définie positive, nous pouvons utiliser la méthode de surrelaxation successive par points (cf. [22] par exemple). Pour cela nous avons procédé de la manière suivante; $u^{n+1}_{i,j}(p)$ désignant la solution de (V-29) après p itérations :

- $u^{n+1}_{i,j}(0) = u^n_{i,j}$ valeurs de départ.
- 35 itérations pour déterminer le paramètre ω de relaxation par la méthode de Gauss-Seidel.

. . *NIT* itérations par la méthode de surrelaxation successive par points avec le ω ainsi déterminé.

On arrête les itérations lorsque pour $p = NIT$:

$$\text{(V-31)} \qquad \frac{|u^{n+1}_{i,j}(p) - u^{n+1}_{i,j}(p-1)|_{l^2(\omega_h)}}{|u^{n+1}_{i,j}(p)|_{l^2(\omega_h)}} < 10^{-6} .$$

où : $$|u^{n+1}_{i,j}|_{l^2(\omega_h)} = \Big(\sum_{(ih,jh)\in\omega_h} |u^{n+1}_{i,j}|^2 \Big)^{1/2}$$

Résultats numériques :

Nous avons pris :

$h_1 = \Delta x = \Delta y = 0{,}025$

$k_1 = \Delta t = 0{,}025$ et $k_1 = 0{,}0125$.

Posons :

. $ER(nk)$ = erreur relative dans $l^2(\Omega_h(nk))$ au temps $t = nk$.

. *ERR.GLOBALE* = erreur relative globale dans $l^2(Q^T_{hk})$ pour $T = 0{,}5$, calculées toujours pour $h = 0{,}05$; $k = 0{,}025$.

Désignons par :

$NIT\ (nk_1)$: le nombre d'itérations nécessaire pour obtenir $u^{n+1}_{i,j}$ à partir de $u^n_{i,j}$ par la relaxation tel que (V-31) soit vérifié.

Dans le tableau qui suit nous donnons pour $h_1 = 0{,}025$, $k_1 = 0{,}025$ les valeurs de $ER(nk)$, $NIT(nk_1)$ pour les mêmes valeurs de $t = nk$ qu'au § III-2-1, ainsi que l'erreur relative globale, pour différents choix de ε .

On constate que la meilleure approximation de la solution $u(x,y,t)$ est obtenue pour ε voisin de $0{,}5.10^{-3}$, la précision étant moins bonne que pour le choix (V-25) de A_0 et A_1 . Ceci est dû au fait que se superposent deux types d'erreur : d'une part l'erreur d'approximation du problème V_ε par le schéma (V-29), (V-30) et d'autre part l'erreur de résolution de ce schéma par la méthode itérative choisie.

Pour $h_1 = 0{,}025$; $k_1 = 0{,}0125$:

. meilleur choix de ε : $\simeq 10^{-5}$.

. *ERR.GLOBALE* = 7,521 % ce qui est nettement moins bon.

$h_1 = 0,025$ $k_1 = 0,025$ *Méthode du domaine auxiliaire* *Choix (V-27) de* A_0 *et* A_1

		$\epsilon = 10^{-6}$	$\epsilon = 10^{-4}$	$\epsilon = 0,25 \times 10^{-3}$	$\epsilon = 0,5 \times 10^{-3}$	$\epsilon = 10^{-3}$
$t = 0,025$	ER (t)	5,211%	4,849%	3,246%	2,338%	4,246%
	NIT (t)	100	100	200	200	180
$t = 0,125$	ER (t)	7,200%	7,033%	5,000%	3,543%	6,548%
	NIT (t)	100	100	200	200	180
$t = 0,225$	ER (t)	7,393%	7,155%	5,132%	3,645%	6,614%
	NIT (t)	100	100	200	200	180
$t = 0,325$	ER (t)	7,756%	7,380%	5,246%	3,795%	6,710%
	NIT (t)	100	100	200	200	120
$t = 0,425$	ER (t)	7,442%	7,012%	4,801%	3,402%	6,413%
	NIT (t)	100	100	200	200	140
$t = 0,525$	ER (t)	7,174%	6,389%	4,662%	3,343%	6,256%
	NIT (t)	100	100	200	200	160
ERR. GLOBALE		7,319%	7,031%	5%	3,550%	6,464%

TEMPS DE CALCUL : 10 minutes - (C.D.C. 3600)

III-3 Problème approché par la méthode variationnelle des différences finies

Nous nous plaçons dans le cadre du § *III-4* , Chapitre *III* et plus particulièrement de l'exemple donné au n° 4 de ce paragraphe . Soit :

- $\mathcal{R}_k = (0, k, 2k, \ldots, mk = T)$ le réseau de pas $\Delta t = k = \frac{T}{m}$ (m entier) sur l'intervalle $[0T]$.

- $\mathcal{R}_h$: le réseau homogène de pas $\Delta x = \Delta y = h$ dans les directions $x'x$ et $y'y$.

- $\sigma_h(M,0)$: le pavé de centre M et côtés $\Delta x = h$, $\Delta y = h$.

- $\sigma_h(M,1) = \sigma_h(M,0) \cup \sigma_h\left(M + \frac{\Delta x}{2}, 0\right) \cup \sigma_h\left(M - \frac{\Delta x}{2}, 0\right) \cup \sigma_h\left(M + \frac{\Delta y}{2}, 0\right) \cup \sigma_h\left(M - \frac{\Delta y}{2}, 0\right)$

- W_m = fonction caractéristique de $\sigma_h(M,0)$.

- $V_h(t) = \left\{ u_h(x,y) \mid u_h = \sum_{M \in \Omega(h,t)} u_h(M)\, W_M ,\ u_h(M) \in R \right\}$

où, pour le problème V traité, nous avons testé deux choix différents de $\Omega(h,t)$:

(V-32) $\quad \Omega(h,t) = \left\{ M \in \mathcal{R}_h \mid \sigma_h(M,1) \subset \Omega_t \right\}$

(V-33) $\quad \Omega(h,t) = \left\{ M \in \mathcal{R}_h \mid \sigma_h(M,0) \subset \Omega_t \right\}$

avec :

$$\Omega_{t_0} = Q \cap \{ t = t_0 \} = \left\{ (x,y) \mid x^2 + y^2 < t_0 + 1 \right\}$$

A partir d'un de ces choix de $\Omega(h,t)$ nous construisons le problème approché P_{hk} comme au § *III-4-4* du chapitre *III* en prenant :

$a_{ij} = \delta_{ij}$ (1 si $i = j$, 0 si $i \neq j$) , $i, j = 1, 2$

$a_i \equiv 0 \quad i = 0, 1, 2$

$f(x,y,t) = 9x$ dans Q

$u_0(x,y) = x(1 - x^2 - y^2)$ dans Ω_0

La solution u_{hk} du problème P_{hk} appartenant à $E^0_{-1}(0, T+k ; V_h(t))$ vérifie pour le domaine Q choisi :

(V-34) $u_{hk}(t) \in V^0_{h,-1}(t) \equiv V_h((n-1)k)$, $\forall t \in [nk, (n+1)k[$.

Notons par $u^n_{i,j}$ la valeur constante de $u_{hk}(x,y,t)$ sur le parallèlépipède :

$\mu(ih, jh, nk) = \{ (x,y,t) \mid (x,y) \in \sigma_h(M,0)$ avec $M = (ih, jh)$; $t \in [nk, (n+1)k[\}$

Le problème P_{hk} correspondant à $\theta = \frac{1}{2}$ dans (III-49) définit $u^n_{i,j}$ à partir du schéma :

$$(V\text{-}35) \quad \frac{u^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{k} - \frac{(\delta^2_x + \delta^2_y)(u^{n+1}_{i,j} + u^n_{i,j})}{2h^2} = f^n_{i,j}$$

$\forall$ i, j entiers tels que $(ih, jh) \in \Omega(h, nk)$, pour $n = 0, 1, \ldots, m-1$ et :

(V-36) $u^0_{i,j} = (O_h(0)\, u_0)(ih, jh)$, $\forall (i,j)$ tels que $(ih, jh) \in \Omega(h, -k)$

où : $\cdot f^n_{i,j} = \frac{1}{k h^2} \int_{nk}^{(n+1)k} \int_{\sigma_h(M,0)} f(x,y,t)\, dx\, dy\, dt$, $M = (ih, jh)$

$\cdot (O_h(0)\ u_0)(M) = \frac{1}{h^2} \int_{\sigma_h(M,0)} u_0(x,y)\, dx\, dy$, $\forall M = (ih, jh)$

$\cdot \delta^2_x, \delta^2_y$ sont définis comme au § II.

On déduit du Résultat *III-8* que le problème P_{hk} admet une solution unique $u_{hk} \in E_{-1}^{0}(0, T+k; V_h(t))$ ou, ce qui est équivalent, $u^n_{i,j}$ pour tout i, j tels que $(ih, jh) \in \Omega(h, (n-1)k)$, $n = 0, 1, \ldots, m$. La solution u_{hk} de P_{hk} (pour $\theta = \frac{1}{2}$) est $L^\infty(0T; L^2(\Omega_t))$ stable $\forall\ h, k$ d'après le théorème *III-8* et converge vers la solution u du problème initial V au sens du théorème *III-9*.

Au lieu de résoudre (V-35) (V-36) qui définit implicitement $u^{n+1}_{i,j}$ à partir de $u^n_{i,j}$ nous avons utilisé le schéma semi-implicite aux directions alternées :

$$(V\text{-}37)\qquad \frac{v^{n+1}_{i,j} - u^n_{i,j}}{(k/2)} - \frac{\delta_x^2\, v^{n+1}_{i,j} + \delta_y^2\, u^n_{i,j}}{h^2} = f^n_{i,j}$$

$$(V\text{-}38)\qquad \frac{u^{n+1}_{i,j} - v^{n+1}_{i,j}}{(k/2)} - \frac{\delta_x^2\, v^{n+1}_{i,j} + \delta_y^2\, u^{n+1}_{i,j}}{h^2} = f^n_{i,j}$$

pour tout (i,j) tel que $(ih, jh) \in \Omega(h, nk)$; $n = 0,1,\ldots, m-1$

et

$$(V\text{-}39)\qquad u^0_{i,j} \text{ donné par } (V\text{-}36)$$

Pour obtenir $(u^{n+1}_{i,j})$ à partir de $(u^n_{i,j})$ on procède comme pour le schéma (V-17) (V-18), en utilisant les valeurs intermédiaires $(v^{n+1}_{i,j})$ définies sur $\Omega(h, nk)$. A chaque étape on aura à résoudre un système linéaire dont la matrice est tridiagonale.

Résultats numériques :

Nous avons pris successivement :

- $h_1 = \Delta x = \Delta y = 0,025$; $k_1 = \Delta t = 0,0125$
  pour $\Omega(h,t)$ donné par (V-32) (V-33)

- $h_1 = 0,025$; $k_1 = 0,00625$
  $\Omega(h,t)$ donné par (V-33)

- $h_1 = 0,025$; $k_1 = 0,003125$ et $\Omega(h,t)$ donné par (V-33).

Pour comparer les différents résultats nous utilisons toujours les critères d'erreur (V-21) et (V-22), calculés pour $h = 0,05$; $k = 0,025$, en posant :

$ER_n(t)$ = erreur relative dans $L^2(\Omega_h(nk))$ pour $t = nk$, entre u_{hk} et u.

Les meilleurs résultats sont obtenus pour $k_1 = 0,003125$ et $\Omega(h,t)$ donné par (V-33). L'erreur est maximum au voisinage de la frontière latérale Γ'_T de Q_T. On a alors essayé de prendre un pas plus fin près de Γ'_T mais sans améliorer sensiblement la précision.

Méthode variationnelle des différences finies $\Delta x = \Delta y = 0,025$; $T = 0,5$

		$k_1 = 0,0125$ $\Omega(h,t)$: (V-32)	$k_1 = 0,0125$ $\Omega(h,t)$: (V-33)	$k_1 = 0,00625$ $\Omega(h,t)$: (V-33)	$k_1 = 0,003125$ $\Omega(h,t)$: (V-33)
$t = 0,025$	ER (t)	7,199%	3,667%	2,743%	2,398%
$t = 0,125$	ER (t)	9,582%	5,054%	3,597%	3,346%
$t = 0,225$	ER (t)	9,472%	4,640%	3,494%	3,062%
$t = 0,325$	ER (t)	8,581%	4,587%	3,819%	3,319%
$t = 0,425$	ER (t)	8,792%	4,848%	3,538%	3,256%
$t = 0,475$	ER (t)	8,252%	4,428%	3,428%	3,260%
Erreur relative globale dans $l^2(Q_{hk}^T)$		8,890%	5,611%	3,637%	3,231%
TEMPS DE CALCUL sur C.D.C. 3600		29 secondes	25 secondes	42 secondes	74 secondes

III - 4. Régularisation elliptique :

Nous nous plaçons dans le cadre du § III-5, Chapitre III. Nous allons construire les problèmes approchés correspondant aux deux procédés de régularisation elliptique énoncés dans ce paragraphe.

Il convient d'abord de se ramener à $u_0(x,y) \equiv 0$ dans Ω_0.

Pour cela considérons :

$$w(x,y,t) = (x - t).(t + 1 - x^2 - y^2) \quad \epsilon \; \mathcal{B}(Q_T).$$

et posons :

$$s(x,y,t) = u(x,y,t) - w(x,y,t) = t\,(t + 1 - x^2 - y^2)$$

où $u(x,y,t)$ est la solution du problème initial V défini au § III-1.

$s(x,y,t)$ est alors la solution unique du :

Problème V_1 : Déterminer $s \in \mathcal{B}(Q_T)$ telle que :

$$- < s, D_t v > + a_T(s,v) = (f_1, v)_{L^2(Q_T)}$$

pour tout $v \in B_T(Q_T)$

avec : $f_1(x,y,t) = 6\,t + 1 - x^2 - y^2$ dans Q_T .

$s(x,y,t)$ vérifie alors :

(V-40) $\quad s(x,y,0) \equiv 0$ dans $\Omega_0 = Q \cap \{ t = 0 \}$.

Enoncons maintenant les problèmes elliptiques associés au problème V_1, dans le domaine $Q_T = Q \cap \{ 0 < t < T \}$ de R^3, par chacun des procédés de régularisation elliptique.

Problème Q_ε : Déterminer $s_\varepsilon \in W$ telle que :

(V-41) $\quad b_\varepsilon(s_\varepsilon, v) = \varepsilon\,(s'_\varepsilon, v') - (s_\varepsilon, v') + a_T(s_\varepsilon, v) = (f_1, v)$

pour tout $v \in W$ avec :

$$W = \{ v \mid v \in H_0^{1,0}(Q_T),\ v' \in L^2(Q_T),\ v(\cdot, T) = 0 \text{ sur } \Omega_T \}$$

Problème Q_ε^1 : Déterminer $s_\varepsilon \in W_1$ telle que :

$$(V\text{-}42) \qquad b_\varepsilon^1(s_\varepsilon, v) = \varepsilon\,(s'_\varepsilon, v') + (s'_\varepsilon, v) + a_T(s_\varepsilon, v) = (f_1, v)$$

pour tout $v \in W_1$ avec :

$$W_1 = \{\, v \mid v \in H_0^{1,0}(Q_T),\ v' \in L^2(Q_T),\ v(\cdot, 0) = 0 \text{ sur } \Omega_0 \,\}$$

où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire dans $L^2(Q_T)$, et $v' = D_t v = \dfrac{\partial v}{\partial t}$ la dérivée de v au sens des distributions à support compact dans Q_T .

D'après le résultat III-10 (respectivement III-11) le problème Q_ε (resp. Q_ε^1) admet une solution unique pour tout ε positif, et d'après le Théorème III-10 (resp. III-11) la solution s_ε de Q_ε (resp. Q_ε^1) vérifie :

$$(V\text{-}43) \qquad s_\varepsilon \longrightarrow s \text{ dans } H^{1,0}(Q_T) \text{ fort quand } \varepsilon \longrightarrow 0.$$

Résolution numérique des problèmes Q_ε *et* Q_ε^1 :

Pour $\varepsilon > 0$ fixé nous sommes ramenés à la résolution d'un problème elliptique dans le domaine Q_T de R^3 , que nous approchons par la méthode variationnelle des différences finies [2]. Nous donnons ci-dessous la construction des deux schémas d'approximation associés à Q_ε ou Q_ε^1 .

Désignons par :

. $\mathcal{R}_{hk}$: le réseau de pas $\Delta x = \Delta y = h$, $\Delta t = k$

. (C,M): le pavé de centre M et côtés h,h et k c.a.d. si $M = (x_M, y_M, t_M)$

$$(C,M) = \{\, (x,y,t) \mid |x - x_M| < \frac{h}{2},\ |y - y_M| < \frac{h}{2}, |t - t_M| < \frac{k}{2} \,\}$$

. W_M : la fonction caractéristique du pavé (C,M).

. $\rho(M) = (C,M) \cup (C, M \pm \frac{\Delta x}{2}) \cup (C, M \pm \frac{\Delta y}{2}) \cup (C, M \pm \frac{\Delta t}{2})$.

et par :

$$Q^T(h,k) = \{M \in \mathcal{R}_{hk} \mid \rho(M) \cap Q_T \neq \emptyset\ ,\ \rho(M) \cap \Omega_T = \emptyset\ ,\ \rho(M) \cap \Gamma'_T = \emptyset\ \}$$

$$Q_1^T(h,k) = \{M \in \mathcal{R}_{hk} \mid \rho(M) \cap Q_T \neq \emptyset\ ,\ \rho(M) \cap \Omega_0 = \emptyset\ ,\ \rho(M) \cap \Gamma'_T = \emptyset\ \}$$

où Γ_T' est la frontière latérale de Q_T .

On associe à $Q^T(h,k)$ et $Q_1^T(h,k)$ les espaces :

$$(V\text{-}44) \qquad V_{hk} = \{ u_{hk}(x,y,t) \mid u_{hk} = \sum_{M \in Q^T(h,k)} u_{hk}(M).\ W_M ,\ u_{hk}(M) \in R \}.$$

$$(V\text{-}45) \qquad V_{hk}^1 = \{ u_{hk}(x,y,t) \mid u_{hk} = \sum_{M \in Q_1^T(h,k)} u_{hk}(M).\ W_M ,\ u_{hk}(M) \in R \}.$$

Les schémas d'approximation de Q_ε et Q_ε^1 s'écrivent respectivement :

Schéma d'approximation de Q_ε : R_{hk}^{ε}

Déterminer $s_{hk}^{\varepsilon} \in V_{hk}$ telle que :

$$(V\text{-}46) \quad \int_{Q_T} (\delta_x s_{hk}^{\varepsilon} . \delta_x v_{hk} + \delta_y s_{hk}^{\varepsilon} . \delta_y v_{hk} + \varepsilon \delta_t s_{hk}^{\varepsilon} . \delta_t v_{hk} - s_{hk}^{\varepsilon} \delta_t v_{hk})\, dx\, dy\, dt$$

$$= \int_{Q_T} f_1 .\ v_{hk}\, dx\, dy\, dt \quad , \quad \forall\ v_{hk} \in V_{hk} .$$

Schéma d'approximation de Q_ε^1 : $R_{hk}^{1,\varepsilon}$:

Déterminer $s_{hk}^{\varepsilon} \in V_{hk}^1$ telle que :

$$(V\text{-}47) \quad \int_{Q_T} (\delta_x s_{hk}^{\varepsilon} . \delta_x v_{hk} + \delta_y s_{hk}^{\varepsilon} . \delta_y v_{hk} + \varepsilon \delta_t s_{hk}^{\varepsilon} . \delta_t v_{hk} + \delta_t s_{hk}^{\varepsilon} .\ v_{hk})\, dx\, dy\, dt$$

$$= \int_{Q_T} f_1 .\ v_{hk}\, dx\, dy\, dt \quad , \forall\ v_{hk} \in V_{hk}^1 .$$

où : . $\delta_x u\,(x,y,t) = (u(x + \frac{\Delta x}{2} , y, t) - u(x - \frac{\Delta x}{2}, y, t)) / \Delta x$.

. δ_y et δ_t définis de manière analogue.

Pour h et k fixés les problèmes R^{ε}_{hk} et $R^{1,\varepsilon}_{hk}$ admettent une solution unique s^{ε}_{hk} telle que :

(V-48) $s^{\varepsilon}_{hk} \longrightarrow s_{\varepsilon}$ dans $L^2(Q_T)$ fort quand $h,k \longrightarrow 0$, *cf* [2], où s_{ε} est la solution de Q_{ε} ou Q^1_{ε} .

En prenant $v_{hk} = W_M$ dans R^{ε}_{hk} (respectivement $R^{1,\varepsilon}_{hk}$) pour tous les M appartenant à $Q^T(h,k)$ (resp. $Q^T_1(h,k)$), les $s^{\varepsilon}_{hk}(P)$ sont solutions d'un système linéaire dont l'ordre est égal au nombre de points de $Q^T(h,k)$ (resp. $Q^T_1(h,k)$).

Résultats numériques :

Nous avons pris :

. $T = 0,5$

. $\Delta x = \Delta y = h = 0,05$ et $\Delta t = k = 0,025$

ce qui conduit à des systèmes linéaires d'ordre 8220 pour Q_{ε} et 7763 pour Q^1_{ε}.

Ces systèmes ont été résolus par la méthode itérative de GAUSS-SEIDEL (la méthode de relaxation successive par points divergeant à cause du mauvais conditionnement de ces matrices).

Si $s^{(P)}_{hk}$ désigne la valeur approchée de la solution s^{ε}_{hk} du schéma R^{ε}_{hk} après p itérations, nous nous sommes arrêtés lorsque :

$$\frac{\| s^{(P)}_{hk} - s^{(P-1)}_{hk} \|_{V_{hk}}}{\| s^{(P)}_{hk} \|_{V_{hk}}} < 10^{-6}$$

où : $\| v_{hk} \|_{V_{hk}} = \left(\sum_{P \in Q^T(h,k)} | v_{hk}(P) |^2 \right)^{1/2}$, $\forall\ v_{hk} \in V_{hk}$.

On a un test d'arrêt analogue pour le schéma $R^{1,\varepsilon}_{hk}$ en remplaçant V_{hk} par V^1_{hk} et $Q^T(h,k)$ par $Q^T_1(h,k)$.

Posons :

$$u^{\varepsilon}_{hk}(x,y,t) = s^{\varepsilon}_{hk}(x,y,t) + w(x,y,t)$$

où $w(x,y,t)$ est défini au début de ce paragraphe. D'après (V-43) et (V-48) $u^{\varepsilon}_{hk} \longrightarrow u$ dans $L^2(Q_T)$ quand h,k et ε tendent vers zéro où u est la solution du problème V.

Pour $\Omega_h(nk)$ et Q^T_{hk} définis au § III-1 avec $h = 0,05$ et $k = 0,025$, nous noterons par :

$E(s;t)$ = l'erreur relative dans $l^2(\Omega_h(nk))$ entre s^{ε}_{hk} et s, pour $t = nk$.

$E(u;t)$ = l'erreur relative dans $l^2(\Omega_h(nk))$ entre u^{ε}_{hk} et u pour $t = nk$;

E R R. GLOBALE sur s = l'erreur relative globale dans $l^2(Q^T_{hk})$ entre s^{ε}_{hk} et s

E R R. GLOBALE sur u = l'erreur relative globale dans $l^2(Q^T_{hk})$ entre u^{ε}_{hk} et u.

définies en (V-21) et (V-22), avec :

. s^{ε}_{hk} = solution de R^{ε}_{hk} ou $R^{1,\varepsilon}_{hk}$

. s = solution du problème V_1 ,

. u = solution du problème V .

Pour chacun des deux schémas nous donnons les valeurs de $E(s,t)$, $E(u,t)$ pour les mêmes valeurs de t qu'aux paragraphes précédents et les erreurs relatives globales dans $l^2(Q^T_{hk})$ en testant le choix du paramètre ε.

Régularisation elliptique. Problème Q_ε *. Schéma :* R^{ε}_{hk}

$h = 0{,}05$; $k = 0{,}025$

		$\varepsilon = 2{,}5 \times 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-3}$	$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$
Nombre d'itérations		365	378	584	636
$t = 0{,}025$	$E(s,t)$	0,910%	1,338%	3,826%	4,636%
$t = 0{,}125$	$E(s,t)$	0,995%	0,748%	0,736%	0,804%
$t = 0{,}225$	$E(s,t)$	1,176%	1,013%	0,843%	0,812%
$t = 0{,}325$	$E(s,t)$	1,635%	1,524%	1,377%	1,348%
$t = 0{,}425$	$E(s,t)$	1,826%	1,682%	1,511%	1,484%
$t = 0{,}475$	$E(s,t)$	2,001%	1,709%	1,489%	1,465%
ERR. GLOBALE SUR s solution de V_1		1,770%	1,581%	1,409%	1,378%
$t = 0{,}025$	$E(u,t)$	0,065%	0,095%	0,273%	0,331%
$t = 0{,}125$	$E(u,t)$	0,338%	0,254%	0,250%	0,274%
$t = 0{,}225$	$E(u,t)$	0,689%	0,594%	0,494%	0,476%
$t = 0{,}325$	$E(u,t)$	1,330%	1,239%	1,120%	1,097%
$t = 0{,}425$	$E(u,t)$	1,872%	1,724%	1,549%	1,522%
$t = 0{,}475$	$E(u,t)$	2,253%	1,925%	1,677%	1,649%
ERR. GLOBALE SUR u solution de V.		1,467%	1,311%	1,168%	1,150%
TEMPS DE CALCUL sur C.D.C. 3600		6 m. 53 s.	7 m. 08 s.	9 m. 18 s.	11 m. 20 s.

Résultats identiques $\forall\ \varepsilon \leqslant 10^{-6}$

Régularisation elliptique. Problème Q_ε^1 . *Schéma :* $R^{i,\varepsilon}_{hk}$

$h = 0,05$; $k = 0,025$

		$\varepsilon = 10^{-4}$	$\varepsilon = 10^{-6}$	$\varepsilon = 10^{-8}$
Nombre d'itérations		312	305	305
$t = 0,025$	$E(s,t)$	3,058%	2,723%	2,720%
$t = 0,125$	$E(s,t)$	2,449%	2,433%	2,431%
$t = 0,225$	$E(s,t)$	2,006%	2,007%	2,007%
$t = 0,325$	$E(s,t)$	1,988%	1,992%	1,992%
$t = 0,425$	$E(s,t)$	2,225%	2,229%	2,229%
$t = 0,475$	$E(s,t)$	2,437%	2,234%	2,232%
ERR. GLOBALE SUR s		2,274%	2,205%	2,204%
$t = 0,025$	$E(u,t)$	0,218%	0,194%	0,193%
$t = 0,125$	$E(u,t)$	0,833%	0,828%	0,827%
$t = 0,225$	$E(u,t)$	1,176%	1,177%	1,177%
$t = 0,325$	$E(u,t)$	1,618%	1,621%	1,621%
$t = 0,425$	$E(u,t)$	2,281%	2,286%	2,285%
$t = 0,475$	$E(u,t)$	2,745%	2,516%	2,513%
ERR. GLOBALE sur u		1,886%	1,829%	1,828%
TEMPS DE CALCUL		5m. 33 s.	5m. 31 s.	5m. 29 s.

IV-Conclusions :

a) *Méthode de Galerkin*

avantages : Dans le cas d'une variable d'espace ($Q \subset R_x \times R_t^+$) la construction des fonctions de base $\varphi^j(x,t)$ ne présente pas de difficultés et la précision obtenue est très bonne.

inconvénients : Si $Q \subset R_x^n \times R_t^+$ avec $n > 1$, il est rarement possible de trouver des fonctions formant une base de $H_0^m(\Omega_t)$ ayant les propriétés voulues. De plus on ne sait pas le nombre de fonctions nécessaire pour obtenir une bonne précision.

Elle nécessite des calculs préliminaires "à la main" généralement assez longs pour trouver les coefficients du système différentiel associé.

b) *Méthode du domaine auxiliaire*

Nous distinguons les deux choix des coefficients $A_{pq}(x,t)$ de la forme $A_\varepsilon(u,v)$

1) $A_{pq} = \begin{cases} a_{pq}(x,t) \text{ dans } Q_T \text{ ; } \delta_{pq} \text{ dans } \omega \times [0T] - \bar{Q}_T \end{cases}$ si $|p| + |q| > 0$

$\quad\quad\quad

2) $A_{pq} = \{ a_{pq}(x,t)$ dans Q_T ; $\frac{1}{\epsilon}\ \delta_{pq}$ dans $\omega \times [0T] - \bar{Q}_T \}$

avantages : . convergence plus forte de $u_\epsilon|_{Q_T'}$ $(Q_T' = \omega \times [0T] - \bar{Q}_T)$ vers zéro.
. bons résultats en dimension un.

Inconvénients : . pour résoudre le problème approché V_ϵ on est obligé d'utiliser un schéma de type implicite afin d'éviter un phénomène de propagation d'erreurs au voisinage de la frontière latérale du domaine. En dimension plus grande que un $(Q \subset R_x^n \times R_t^+ ;\ n > 1)$ on est conduit à résoudre à chaque pas temps un système linéaire d'ordre élevé.

. mauvais conditionnement des matrices correspondantes.
. temps de calcul assez long.

c) *Méthode variationnelle des différences finies.*

avantages : . facile à construire le plus souvent
. pas d'ennuis avec le conditionnement des matrices.
. faible temps de calcul.

Inconvénients : . précision médiocre (3 à 5 %) dûe au fait que les points situés près de la frontière sont mal approchés.

d) *Régularisation elliptique* (2 *procédés*)

avantages : erreurs réparties uniformément sur le domaine $Q_T = Q \cap \{ 0 < t < T \}$
. les points voisins de la frontière sont bien approchés.
. bonne précision pour ϵ choisi suivant (V-49) : 1 à 2 %

Inconvénients : . elle conduit à la résolution d'un gros système linéaire assez mal conditionné pour ϵ petit.
. temps de calcul très long.

En conclusion en dimension un, on utilisera de préférence

a) ou b) 1) ou à la rigueur b) 2) ; en dimension plus grande que un b) 1) est de beaucoup la plus facile à construire et la plus efficace.

BIBLIOGRAPHIE

-:-:-:-:-

[1] *AUBIN J.P.* - Approximation des espaces de distributions et de opérateurs différentiels; Thèse, Paris, 1966.

[2] *CEA J.* - Approximation variationnelle des problèmes aux limites; Annales de l'Institut Fourier 14, 2, 1964, p. 345-444.

[3] *COLLATZ L.* - The numerical treatment of differential equations; *3ème* éd., Springer, 1960.

[4] *DOUGLAS J.JR.* - A survey of numerical methods for parabolic differential equations; Advances in computers, vol. 2, Academic Press, New York, 1961, p. 1-54.

[5] *FORSYTHE G.E.-WASOW W.R.*- Finite difference methods for partial differential equations; Wiley, New York, 1960.

[6] *LAURENT P.J.*- Etude de procédés d'extrapolation en Analyse Numérique; Thèse, Grenoble, 1964.

[7] *LIONS J.L.*- Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites; Springer, Berlin, 1961.

[8] *LIONS J.L.*-Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles; Université de Montréal, été 1962.

[9] *LIONS J.L.*-Sur l'approximation des solutions de certains problèmes aux limites; Rendiconti del seminario mathematico della Universita di Padova; 32, 1962, P. 1-54.

[10] *LIONS J.L.*-Equations aux dérivées partielles opérationnelles dans les espaces de Hilbert; Cours du C.I.M.E., Rome, Juin 1963.

[11] *LIONS J.L.*-Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans des ouverts non cylindriques; Annales de l'Institut Fourier 7, 1957, p. 143-182.

[12] *LIONS J.L.*-Singular pertubations and some non linear boundary value problems; Madison University of Wisconsin Press, Oct. 1963.

[13] *LIONS J.L.-MAGENES.*-Problèmes aux limites non homogènes; Annales de l'Institut Fourier 11, 1961, p. 136-178.

[14] *MAC SHANE E.J.*-Integration; Princeton University Press, 1944.

[15] *RAVIART P.A.*-Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires; Thèse, Paris, 1965.

[16] *RICHARDSON L.F.*-The deferred approach to the limit; Phil. Trans. Roy. London, vol. 226, 1927, p. 229-361.

[17] *ROGAK E.D.*-A mixed problem for the wave equation in a time dependent domain; Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 22,1966, p. 24-36.

[18] *SATHER J.O.*-The initial boundary value problems for the Navier-Stokes equations in regions with moving boundary; University of Minnesota, Report 421, Jan. 1963.

[19] *SAULIEV.*-Sibirsky Math. Journal, tome 4, 1963, p. 912,925.

[20] *SOUTHWELL R.V.* Relaxation methods in theorical physics; Clarendon Press, Oxford, 1946.

[21] *TODD J.*-Asurvey of Numerical Analysis; Mac Graw Hill Book, New York, 1962.

[22] *VARGA R.S.*-Matrix iterative analysis; Prentice Hall, 1962.

DEUXIEME THESE

-:-:-:-:-:-

Propositions données par la Faculté

"Travaux récents sur le 13 ème problème de Hilbert et l'ε entropie"

Vu et approuvé :

Paris, le 28 FEVRIER 1967

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

Marc ZAMANSKY

Vu

et Permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie

de Paris

Jean ROCHE